UNIV OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s8journaldemat04liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL

HUITIÈME SÉRIE

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN

AVEC LA COLLABORATION DE

MONTESSUS DE BALLORE, E. PICARD, H. VILLAT

TOME QUATRIÈME — ANNÉE 1921

(86e Volume de la Collection)

208820
24.2.26

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1921

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Funérailles de M. Georges Humbert.

Discours de M. Camille JORDAN.

La mort ne se lasse pas de frapper l'Académie des Sciences. Elle vient encore de nous enlever un de nos Confrères les plus éminents et les plus aimés.

Georges Humbert s'est éteint doucement le 23 janvier dernier. Cette mort était le dénouement d'une maladie implacable, dont toute la tendresse d'une épouse dévouée n'avait pas réussi à arrêter les progrès.

Il appartenait à notre Compagnie depuis 1901. Sa vive intelligence, le charme de sa conversation, la droiture de son caractère avaient conquis la sympathie de tous ceux qui l'approchaient.

Chargé par l'Académie de présenter ses condoléances à cette famille en deuil, qu'il me soit permis d'y joindre l'expression de la douleur personnelle que me fait éprouver la perte d'une vieille amitié.

Avant de devenir illustre, Humbert avait été mon élève, et j'en étais fier à juste titre. Plus tard, il m'a succédé dans les chaires de l'École Polytechnique et du Collège de France. Ses leçons pouvaient servir

de modèle. On y retrouve les qualités d'élégance et de clarté qui distinguent tous ses écrits.

D'autres peuvent se contenter de semer des idées fécondes, laissant à d'autres le soin de les faire fructifier. Il était plutôt le moissonneur qui récolte à pleines gerbes, bat et met en grange. La liste des problèmes qu'il a abordés serait bien longue; il n'en est pourtant aucun dont il n'ait donné la solution complète et définitive.

Les méthodes de la haute Analyse et celles de la Géométrie lui étaient également familières; et, en les maniant habilement, il lui est arrivé plus d'une fois de rendre intuitives par des représentations ingénieuses les propositions les plus ardues de l'Arithmétique.

Ses travaux sur les surfaces algébriques, sur les applications du théorème d'Abel, sur les fonctions continues, resteront des modèles. Mais son œuvre capitale est l'étude des transformations singulières des fonctions hyperelliptiques et des multiplications complexes auxquelles elles donnent naissance.

Une maladie grave l'empêchait depuis assez longtemps d'assister aux séances de l'Académie; mais elle n'avait pas ralenti son labeur scientifique. Il poursuivait avec une sorte de passion des recherches sur les formes quadratiques et m'en a entretenu plusieurs fois. Mais chaque question résolue en suggérant une autre, il est resté longtemps sans en rien publier. Quelques Notes sur ce sujet viennent pourtant de paraître dans les *Comptes rendus*.

Mais tout porte à croire qu'il était en possession de beaucoup d'autres résultats aussi intéressants que ceux qu'il a publiés. Il faut espérer qu'on en trouvera la trace dans ses papiers. Il serait trop triste d'avoir à déplorer ici une perte semblable à celle causée par la mort d'Halphen, enlevé comme Humbert en plein travail et dans la maturité de son génie.

Sur les formes d'Hermite ternaires dans un corps quadratique imaginaire (champs $\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-2}$);

PAR G. HUMBERT.

I. — Généralités.

Soit la forme d'Hermite

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x, y, z) = {} & a x x_0 + b''_0 x y_0 + b'' x_0 y \\ & + a' y y_0 + b_0 y z_0 + b y_0 z + a'' z z_0 + b'_0 z z_0 + b' z_0 x, \end{aligned}$$

a, a', a'' étant des entiers réels, b, b_0, ... des entiers conjugués du corps quadratique $\sqrt{-1}$ ou $\sqrt{-2}$, ainsi que x, x_0, ...

La forme f est dite *primitive* lorsque les coefficients a, b''_0, ... n'ont aucun diviseur, entier réel, commun. Lorsque, de plus, a, a', a'' ne sont pas pairs à la fois, la forme est dite *proprement primitive*.

Le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b''_0 & b' \\ b'' & a' & b_0 \\ b'_0 & b & a'' \end{vmatrix}$$

est appelé *déterminant de la forme*. Son développement est

$$D = a a' a'' + b b' b'' + b_0 b'_0 b''_0 - a b b_0 - a' b' b'_0 - a'' b b''_0.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} a x_0 + b''_0 y_0 + b' z_0 &= X, & a x + b'' y + b_0 z &= X_0, \\ b'' x_0 + a' y_0 + b_0 z_0 &= Y, & b''_0 x + a' y + b z &= Y_0, \\ b'_0 x_0 + b y_0 + a'' z_0 &= Z, & b' x + b_0 y + a'' z &= Z_0, \end{aligned}$$

on a

$$f(x, y, z) = x X + y Y + z Z = x_0 X_0 + y_0 Y_0 + z_0 Z_0.$$

La forme obtenue en remplaçant dans la forme donnée x, y, z

(et aussi x_0, y_0, z_0) par leur valeur en fonction de X, Y, Z, X_0, Y_0, Z_0, s'appelle la *forme adjointe* de la forme $f(x, y, z)$.

Son expression est

$$-\begin{vmatrix} a & b'_0 & b' & X \\ b'' & a' & b_0 & Y \\ b'_0 & b & a'' & Z \\ X_0 & Y_0 & Z_0 & O \end{vmatrix} = XX_0(a'a'' - bb_0) + \ldots.$$

On désigne par Ω le plus grand commun diviseur (entier ordinaire) des coefficients de l'adjointe; on prend $\Omega > 0$ si la forme f est définie et $\Omega < 0$ si elle est indéfinie. La forme adjointe peut s'écrire ΩF; F est appelée la *forme réciproque* de f.

Les coefficients de l'adjointe sont

$$\begin{aligned} A &= a'a'' - b\,b_0, & B''_0 &= b_0 b'_0 - a''b'', \\ A' &= a\,a'' - b'b'_0, & B'_0 &= b''_0 b'_0 - a'b', \\ A'' &= a\,a' - b''b'_0, & B_0 &= b'_0 b''_0 - a\,b. \end{aligned}$$

Comme on a $A'A'' - BB_0 = Da, \ldots, \Omega^2$ divise $Da, D'a', \ldots$, c'est-à-dire divise D, car les coefficients de la forme f n'admettent aucun diviseur, entier réel, commun.

On pose alors

$$D = \Omega^2 \Delta.$$

Les formes $f(x, y, z)$, pour lesquelles Ω et Δ sont les mêmes, forment un *ordre*.

Les formes f et F sont définies ou indéfinies en même temps (cela résulte des conditions pour qu'une forme soit définie).

On démontre, comme dans le cas des formes ternaires ordinaires, les deux *relations fondamentales*.

La première est

$$f(x, y, z; x_0, y_0, z_0) f(x', y', z', \ldots) = HH_0 + \Omega F(x'y - y'x, \ldots)$$

(la seule différence avec les formes ordinaires est que H^2 est remplacé par HH_0).

Dans les formes d'Hermite, il n'y a pas de *genres*, ce qui simplifie beaucoup la théorie.

II. — Mesure du nombre des représentations d'un entier, premier a $2\Omega\Delta$ par les formes de l'ordre (Ω, Δ).

1. *Représentations propres.* — On passe, comme dans la théorie des formes ordinaires, par la *représentation d'une forme binaire.*

Si, dans la forme $f(x, y, z)$, on pose

$$\begin{aligned} x &= \alpha\xi + \alpha'\eta, & x_0 &= \alpha_0\xi_0 + \alpha'_0\eta_0, \\ y &= \beta\xi + \beta'\eta, & y_0 &= \beta_0\xi_0 + \beta'_0\eta_0, \\ z &= \gamma\xi + \gamma'\eta, & z_0 &= \gamma_0\xi_0 + \gamma'_0\eta_0, \end{aligned}$$

les α, α', ... étant des entiers complexes, tels que les mineurs $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}$ soient premiers entre eux (dans le sens de Gauss), et si

$$f(x, y, z) = \varphi(\xi, \eta) = m\xi\xi_0 + n''\xi_0\eta + n''_0\xi\eta_0 + m'\eta\eta_0,$$

on dit que $f(x, y, z)$ représente *proprement* $\varphi(\xi, \eta)$.

Soit $D = n''n''_0 - mm'$ le déterminant de $\varphi(\xi, \eta)$; on a

$$D = -\Omega F(\beta\gamma' - \gamma\beta', \ldots).$$

D est donc de la forme $D = -\Omega M''$.

La représentation de φ par f dépend de congruences, dont il suffit d'écrire celle-ci (inconnues N, N_0, conjuguées) :

$$NN_0 + \Delta m \equiv 0 \qquad (\text{mod } M'').$$

Étudions d'abord le cas du *champ* $\sqrt{-1}$.

On sait, par Hermite, que si M'' est impair et premier à $\Omega\Delta$, cas dans lequel nous nous placerons, et si

$$M'' = p^\alpha p'^\alpha \ldots,$$

le nombre de solutions de la congruence est

$$M''\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\left[1 - \left(\frac{-1}{p'}\right)\frac{1}{p'}\right]\cdots$$

Supposons Ω et Δ impairs; toutes les formes $\mathfrak{F}$ sont, dans ce cas, *proprement primitives.*

On conclut, comme dans la théorie ordinaire, que « la mesure du nombre des représentations propres de M'', premiers à $2\Omega\Delta$, par les $\mathfrak{F}$,

proprement primitives, d'un même ordre (Ω, Δ) ($\Omega\Delta$ impair), est

$$[H(-\Omega M'') + H_1(-\Omega M'')]\, M''\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\cdots,$$

$H(-\Omega M'')$ étant la mesure des classes de formes (positives, proprement primitives) binaires d'Hermite, de déterminant $-\Omega M''$, H_1 la même mesure pour les classes de formes improprement primitives ».

2. *Conséquence.* — On déduit du théorème précédent l'équation

$$\sum \frac{1}{k\,\mathfrak{F}^s(x, y, z)} = \sum \frac{1}{m^s}[H(-\Omega m) + H_1(-\Omega m)]\, m\, \Pi_p\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right].$$

Au premier membre, Σ porte :

1° Sur les $\mathfrak{F}$ proprement primitives de l'ordre (Ω, Δ);

2° Sur les x, y, z, entiers complexes du champ $\sqrt{-1}$, premiers entre eux, rendant $\mathfrak{F}$ premier à $2\Omega\Delta$.

k est le nombre de transformations, à déterminant $+1$ de $\mathfrak{F}$ en elle-même.

Au second membre, Σ porte sur les m, entiers ordinaires premiers à $2\Omega\Delta$; $p, p', \ldots$ sont les facteurs premiers de m.

Or, d'après une formule de M. Fatou.

$$H(-\Omega m) = \frac{\Omega m}{8}\,\Pi_\omega\left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\Pi_p\left[1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right],$$

ω désignant les facteurs premiers > 1 de Ω, et, d'autre part,

$$H_1(-\Omega m) = 0 \qquad \text{si} \quad \Omega m \equiv 1 \pmod 4,$$

$$H_1(-\Omega m) = \frac{2}{3}H(-\Omega m) \qquad \text{si} \quad \Omega m \equiv 3 \pmod 4.$$

Le second membre s'écrit donc

$$\sum \lambda_m \frac{1}{m^{s-2}}\,\frac{\Omega}{8}\,\Pi_\omega\left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\Pi_p\left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

$\lambda_m = 1$ ou $\frac{5}{3}$, selon que $\Omega m \equiv 1$ ou $3 \pmod 4$, c'est-à-dire

$$\lambda_m = \frac{1}{3}\left[4 - \left(\frac{-1}{\Omega m}\right)\right].$$

Prenons d'abord dans λ_m le terme $\frac{4}{3}$; la partie correspondante du second membre est, en faisant $m = p^{\alpha} p'^{\alpha'} \ldots$,

$$\frac{4}{3}\frac{\Omega}{8}\Pi_{\omega}\sum_{\alpha\,\alpha'\ldots}\frac{1}{p^{\alpha(s-2)}\,p'^{\alpha'(s-2)}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p'^2}\right)\cdots,$$

p, p', ... parcourent les nombres premiers impairs, 1 compris : pour $p = 1$, on pose $\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = 1$.

On voit de suite que Σ est un produit par rapport à p, p', ... La somme des termes qui répondent, pour p, à $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ est

$$1+\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{1}{p^{\alpha(s-2)}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^{s-2}}}.$$

Donc, la première partie du second membre est

$$\frac{4}{3}\frac{\Omega}{8}\Pi_{\omega}\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\Pi_p\frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^{s-2}}},$$

p parcourant tous les nombres premiers réels impairs premiers à $\Omega\Delta$

Prenons maintenant dans λ_m le terme

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega m}\right).$$

On peut l'écrire

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\left(\frac{-1}{p}\right)^{\alpha}\left(\frac{-1}{p^s}\right)^{\alpha}\cdots.$$

La seconde partie du second membre est donc

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\frac{\Omega}{8}\Pi_{\omega}\Pi_p\left\{1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{p^{\alpha(s-2)}}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right\}$$

c'est-à-dire, en sommant la progression géométrique,

$$-1\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\frac{\Omega}{8}\Pi_{\omega}\Pi_p\frac{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-2}}}.$$

Le second membre total devient

$$\frac{4}{3}\frac{\Omega}{8}\Pi_\omega \Pi_p \frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^{s-2}}} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\frac{\Omega}{8}\Pi_\omega \Pi_p \frac{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-2}}}.$$

3. *Formule fondamentale.* — Appliquons à la forme $\psi(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2$, de déterminant -1, la formule de Dirichlet du champ réel, on a

$$\text{(R)} \qquad \sum \frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^s} = \Pi_p \frac{1+\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^s}}.$$

Dans le premier membre, Σ porte sur les nombres ξ et η premiers entre eux, tels que $\xi^2+\eta^2$ soit premier à $2\Omega\Delta$; dans le deuxième, p est premier, >1, premier à $2\Omega\Delta$. On ne prend dans Σ'' qu'une représentation par série (c'est-à-dire que si l'on a pris ξ, η on ne prend pas ξ', η' déduits de ξ, η par une des transformations de $\xi^2+\eta^2$ en elle-même). Autrement, il faudrait multiplier le second membre de la relation (R) par 4.

Multiplions membre à membre la relation obtenue précédemment et R; on obtient au premier membre

$$\sum \frac{1}{k\,\mathfrak{F}^s(x, y, z)} \sum \frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^s},$$

c'est-à-dire, en posant $\xi^2+\eta^2 = uu_0$,

$$\sum \frac{1}{k\,\mathfrak{F}^s(xu, yu, zu)},$$

$u = \xi + \eta i$ est un entier complexe premier à $2\Omega\Delta$; ξ et η sont premiers entre eux dans le champ réel (cela exclut ξ entier réel >1 et $\eta = 0$). Grâce à la convention faite sur ξ, η, tout système ξ, η convenable figure une fois et une seule au premier membre, k désigne toujours le nombre des transformations à déterminant $+1$ de $\mathfrak{F}$ en elle-même.

Le second membre est

$$\frac{4}{3}\frac{\Omega}{8}\Pi_\omega \Pi_p \frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right]\left[1-\frac{1}{p^{s-2}}\right]} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\frac{\Omega}{8}\Pi_\omega \Pi_p \frac{1+\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)}.$$

Transformons les termes du produit Π_p :

$$\frac{1+\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{-1}{p}\right)} = \frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left[1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-2}}\right]}.$$

Le second membre devient, par une transformation connue,

$$\frac{4}{3}\frac{\Omega}{8}\Pi_\omega \frac{\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s}}{\sum\frac{1}{n^{2s}}} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\frac{\Omega}{8}\Pi_\omega \frac{\sum\frac{1}{n^s}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-2}}}{\sum\frac{1}{n^{2s}}},$$

où n, dans les Σ, parcourt les nombres entiers impairs positifs, premiers à $2\Omega\Delta$.

Faisons passer $\sum\frac{1}{n^{2s}}$ au premier membre; celui-ci devient

$$\sum\frac{1}{k\,\mathcal{F}^s(nu.x,\ nuy,\ nuz)},$$

c'est-à-dire

$$\sum\frac{1}{k\,\mathcal{F}^s(X,\ Y,\ Z)},$$

où X, Y, Z ne sont plus premiers entre eux, mais sont tels que $\mathcal{F}(X, Y, Z)$ est premier à $2\Omega\Delta$.

Par les conventions faites sur ξ, η, chaque système X, Y, Z convenable ne figure qu'une fois.

On obtient ainsi l'équation fondamentale :

$$\sum\frac{1}{ki\mathcal{F}_i^s(X,Y,Z)} = \frac{\Omega\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]}{24}$$
$$\times\left[4\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s} - \left(\frac{-1}{\Omega}\right)\sum\frac{1}{n^s}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-2}}\right].$$

Au premier membre, Σ porte :

1° Sur les $\mathcal{F}_i$ proprement primitives de l'ordre (Δ, Ω);

2° Sur les X, Y, Z entiers complexes tels que $\mathcal{F}_i(X, Y, Z)$ soit premier à $2\Omega\Delta$.

Au second membre, ω désigne tout facteur premier, impair, >1, de Ω; n, dans les Σ, parcourt les entiers ordinaires positifs premiers à $2\Omega\Delta$.

4. *Représentation d'un entier.* — En égalant dans les deux membres de l'équation précédente les coefficients de $\frac{1}{m^s}$, on obtient le théorème suivant :

La mesure du nombre des représentations, propres ou non, de m, positif, premier à $2\Omega\Delta$, par les formes $\mathfrak{F}$ proprement primitives de l'ordre (Ω, Δ) (Ω, Δ impair), est

$$\frac{1}{24}\Omega\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\left[4-\left(\frac{-1}{m\Omega}\right)\right]\sum n^2\left(\frac{-1}{n^2}\right),$$

la somme Σ étant étendue aux décompositions $m = nn'$.

Application. — Soit $f = xx_0 + yy_0 + zz_0$. On a

$$\Omega = \Delta = 1, \qquad \mathfrak{F} = f.$$

Il n'y a qu'une classe proprement primitive de l'ordre $(1, 1)$. Pour cette classe, $k = 96$. On a, par suite, le théorème :

Le nombre de décompositions d'un nombre impair en une somme de six carrés est

$$4\left[4-\left(\frac{-1}{m}\right)\right]\sum n^2\left(\frac{-1}{n^2}\right),$$

Σ étant étendu aux décompositions $m = nn'$.

5. *Cas de $\Delta\Omega$ pair.* — On démontre que, si f est proprement primitive, elle ne peut représenter proprement des formes binaires improprement primitives. Supposons donc f et $\mathfrak{F}$ proprement primitives, c'est-à-dire prenons toutes les f_i proprement primitives de l'ordre $(\Omega\Delta)$ dont les réciproques $\mathfrak{F}_i$ sont proprement primitives. Il n'y a pas à introduire dans la formule les formes improprement primitives, binaires, de déterminant $-\Omega M^2$; on fera donc $\lambda_m = 1$. Il vient

$$\sum\frac{1}{k\mathfrak{F}^s(X, Y, Z)} = \frac{\Omega}{8}\Pi_\omega\left[1-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

les ω étant les diviseurs impairs, premiers, > 1 de Ω. On en conclut :

La mesure du nombre des représentations (propres et impropres) par les $\mathfrak{F}$ de m impair, premier à $2\Omega\Delta$, est

$$\frac{1}{8}\Omega\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\sum n^2\left(\frac{-1}{n'}\right),$$

Σ étant étendu aux décompositions $m = nn'$.

Applications. — 1° Soient

$$f = xx_0 + yy_0 + 2zz_0, \qquad \mathfrak{F} = 2xx_0 + 2yy_0 + zz_0, \qquad \Omega = 1, \qquad \Delta = 2.$$

Les classes correspondantes sont uniques dans leurs ordres respectifs; $k = 32$ pour f et $\mathfrak{F}$. On obtient le théorème suivant :

Le nombre des représentations primitives ou non, de m impair, par l'expression

$$2(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_3^2 + x_4^2) + x_5^2 + x_6^2$$

est

$$4\sum n^2\left(\frac{-1}{n'}\right).$$

2° $\quad f = 2xx_0 + 2yy_0 + zz_0, \qquad \mathfrak{F} = xx_0 + yy_0 + 2zz_0, \qquad \Omega = 2, \qquad \Delta = 1.$

On obtient, de la même façon :

Le nombre des représentations de m impair par

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_5^2 + x_6^2)$$

est

$$8\sum n^2\left(\frac{-1}{n'}\right).$$

Ces deux théorèmes ont été donnés, sans démonstration, par Liouville (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. 9).

3° $\quad f = xx_0 + yy_0 + 3zz_0, \qquad \mathfrak{F} = 3xx_0 + 3yy_0 + zz_0, \qquad \Omega = 1, \qquad \Delta = 3.$

Il y a une autre forme proprement primitive, du même ordre, non équivalente :

$$f' = xx_0 + 2yy_0 + yz_0 + y_0z + 2zz_0.$$

La forme $\varphi' = 2yy_0 + yz_0 + y_0z + 2zz_0$ admet 6 automorphies;

f' en admet donc $4 \times 6 = 24$; f admet 32 automorphies. D'où le théorème :

Soient N_m et N'_m les nombres des représentations de m, impair, premier à 3 par les expressions

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 3u^2 + 3v^2$$

et

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 2zu + 2u^2 + 2t^2 + 2tv + 2v^2.$$

On a, entre N_m et N'_m la relation

$$3N_m + 4N'_m = 8\left[4 + \left(\frac{-1}{m}\right)\right]\sum n^2\left(\frac{-1}{n'}\right).$$

III. — Représentations d'un entier (champ $\sqrt{-2}$).

1. *Cas de $\Delta\Omega$ impair.* — Les formes f et $\bar{f}$ ont leur discriminant impair, et sont par suite proprement primitives. Le nombre des représentations propres par les $\bar{f}$ de m positif, premier à $2\Omega\Delta$, est ($m = p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots$)

$$[M(\Omega m) + M'(\Omega m)]\, m\left[1 - \left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\cdots$$

Or, par la théorie des formes binaires, on a :

$$M(\Omega m) = \frac{2\Omega m}{8} H_\omega\left[1 + \left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right] H_p\left[1 + \left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p}\right],$$

$$M'(\Omega m) = \mu M(\Omega m) \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{1}{6}\left[2 - \left(\frac{-2}{\Omega m}\right)\right].$$

De même que pour le corps $\sqrt{-1}$,

$$(1) \qquad \sum \frac{1}{k\bar{f}^s(x, y, z)} = \sum \frac{1}{m^s}[M(\Omega m) + M'(\Omega m)]\, m\, H_p\left[1 - \left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p}\right].$$

Au premier membre, x, y, z sont des entiers, premiers entre eux, du corps $\sqrt{2}$, tels que $\bar{f}$ soit premier à $2\Omega\Delta$; les $\bar{f}$ sont les formes (proprement primitives) d'invariants Δ, Ω. La somme du second membre porte sur les m premiers à $2\Omega\Delta$.

Le second membre s'écrit

$$\sum \frac{1}{m^{s-2}}\left[1 - \left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\cdots$$
$$\times \frac{1}{p}\Omega H_\omega\left[1 + \left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\left[1 + \left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\cdots\frac{1}{6}\left[8 - \left(\frac{-2}{\Omega m}\right)\right].$$

La quantité sous le signe Σ est

$$(\varepsilon)\quad \frac{\Omega}{24}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\frac{1}{p^{\alpha(s-2)}}\cdots\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\cdots\left[8-\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\left(\frac{-2}{p}\right)^{\alpha}\cdots\right].$$

Pour $m=1$, on a dans cette expression le terme

$$M(\Omega)+M'(\Omega)\quad\text{ou}\quad\frac{\Omega}{24}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\left[8-\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\right]$$

que nous mettrons en évidence en écrivant (ε) de la façon suivante :

$$\frac{\Omega\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]}{24}$$
$$\times\left\{8\left[1+\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{1}{p^{\alpha(s-2)}}\cdots\right]-\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\left[1+\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{1}{p^{\alpha(s-2)}}\left(\frac{-2}{p}\right)^{\alpha}\cdots\right]\right\}.$$

Sommons les progressions géométriques $\alpha=1$ à ∞; on a

$$\frac{\Omega}{3}\Pi_\omega\Pi_p\left[1+\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left\{\frac{\frac{1}{p^{s-2}}}{1-\frac{1}{p^{s-2}}}\right\}\right.$$
$$-\frac{\Omega\Pi_\omega}{24}\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\Pi_p\left\{1+\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\frac{\frac{1}{p^{s-2}}\left(\frac{-2}{p}\right)}{1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^{s-2}}}\right\}$$

ou encore

$$(2)\qquad \frac{\Omega\Pi_\omega}{3}\Pi_p\frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^{s-2}}}-\frac{\Omega\Pi_\omega}{24}\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\Pi_p\frac{1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^{s-2}}},$$

p parcourt, dans Π_p, tous les nombres premiers impairs, premiers à $\Omega\Delta$.

On a, d'autre part :

$$(3)\qquad \sum\frac{1}{(\xi^2+2\eta^2)^s}=\Pi_p\frac{1+\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^s}},$$

$\xi^2+2\eta^2$ premier à $2\Omega\Delta$, ξ et η premiers entre eux.

Multiplions (1) et (3) membre à membre, en remplaçant le second

membre de (1) par (2); on trouve

$$\sum \frac{1}{k\bar{x}^s(xu, yu, zu)} = \frac{\Omega}{3}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\Pi_p \frac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{p^{s-2}}\right)\left[1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^s}\right]}$$

$$-\frac{\Omega}{24}\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\Pi_\omega\Pi_p \frac{1+\frac{1}{p^s}}{1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p^{s-2}}},$$

u est un entier du corps $i\sqrt{2}$ premier à $2\Omega\Delta$ ($u = \xi + i\eta\sqrt{2}$, ξ et η premiers dans le champ réel).

Le second membre s'écrit

$$\frac{\Omega}{3}\Pi_\omega \frac{\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^s}}{\sum\frac{1}{n^{2s}}} - \frac{\Omega}{24}\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\Pi_\omega \frac{\sum\frac{1}{n^s}\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^{s-2}}}{\sum\frac{1}{n^{2s}}},$$

n entier quelconque positif, premier à $2\Omega\Delta$.

Chassant $\sum\frac{1}{n^{2s}}$, on a

$$\sum \frac{1}{k\bar{x}^s(X, Y, Z)} = \frac{\Omega}{24}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]$$
$$\times\left\{8\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^s} - \left(\frac{-2}{\Omega}\right)\sum\frac{1}{n^s}\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^{s-2}}\right\},$$

X, Y, Z sont des entiers quelconques du corps $i\sqrt{2}$, tels seulement que $\bar{x}(X, Y, Z)$ soit premier à $2\Omega\Delta$; ω est un diviseur premier impair > 1 de Ω, n un entier quelconque, positif, premier à $2\Omega\Delta$.

2. *Cas de $\Omega\Delta$ pair.* — On démontre, comme pour le corps $\sqrt{-1}$ que $M'(\Omega\Delta)$ n'a pas à intervenir; il reste (les formes f et $\bar{x}$ étant proprement primitives) pour la formule fondamentale :

$$\sum \frac{1}{k\bar{x}^s(X, Y, Z)} = \frac{\Omega}{4}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^s}.$$

3. *Représentations d'un entier.* — Dans le cas de $\Omega\Delta$ impair, on a le corollaire suivant :

Le nombre total des représentations de m, entier positif, premier à $2\Omega\Delta$ *par les* $\mathfrak{F}_i$, *une représentation par* $\mathfrak{F}_i$ *comptant pour* $\frac{1}{k_i}$, *est*

$$\frac{\Omega}{24}\,\mathrm{H}_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\left\{8\sum d^2\left(\frac{-2}{d'}\right)-\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\sum d^2\left(\frac{-2}{d}\right)\right\},$$

les sommes étant étendues aux décompositions $m = d\,d'$, *ou encore*

$$\frac{\Omega}{24}\,\mathrm{H}_\omega\left[1+\left(\frac{-2}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\sum d^2\left(\frac{-2}{d}\right)\left[8\left(\frac{-2}{m}\right)-\left(\frac{-2}{\Omega}\right)\right].$$

4. *Application.* — Soit $\Omega = \Delta = 1$.

Les formes $\mathfrak{F}_i$ sont alors :

$$\mathfrak{F}_1 = xx_0 + yy_0 + zz_0 \qquad (k_1 = 24).$$

$$\mathfrak{F}_2 = xx_0 + 2yy_0 + (1+i\sqrt{2})z_0y + (1-i\sqrt{2})zy_0 + 2zz_0 \qquad (k_2 = 48)$$

[car la forme $2yy_0 + (1+i\sqrt{2})z_0y + (1-i\sqrt{2})zy_0 + 2zz_0$ a 24 automorphies, on en conclut que $\mathfrak{F}_2$ en a 48].

$\mathfrak{F}_1$ donne des représentations par l'expression

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(t^2 + u^2 + v^2),$$

x, y, z, t, u, v étant réels. Soit N_1 le nombre de ces représentations.

Les représentations pour $\mathfrak{F}_2$ sont de la forme

$$m = x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_1z_1 + 4y_2z_2 + 4(y_1z_2 - y_2z_1) + 2z_1^2 + 4z_2^2;$$

ce que l'on peut écrire

$$m = x_1^2 + 2x_2^2 + (2y_2 + z_2 - z_1)^2 + (z_1 + y_1 + z_2)^2 + (y_1 + z_2)^2 + z_2^2$$

ou encore

$$m = x_1^2 + 2x_2^2 + u^2 + v^2 + w^2 + t^2$$

avec la seule condition

$$u + v + w + t \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2)$$

ou x_1 impair.

Soit N_2 le nombre de ces représentations.

La formule du n° 5 donne

$$N_1 + \frac{1}{2}N_2 = \left[8\left(\frac{-2}{m}\right) - 1\right]\sum d^2\left(\frac{-2}{d}\right).$$

On en déduit une formule de Liouville, en distinguant différents cas.

1° $m \equiv 5 \pmod 8$. — N_1 est le nombre des décompositions

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2, \tag{1}$$

où t et u ont même parité, c'est-à-dire où $x + y + z$ est impair. Or, les décompositions (1) sont de trois espèces :

1. Celles où v est pair, x, y, z, t, u impairs. Soit X leur nombre;

2. Celles où v est pair, un seul des $x \ldots u$ impair. Soit Y leur nombre;

3. Celles où v est impair, trois des $x \ldots u$ impairs. Soit Z leur nombre.

Quelles sont celles de ces décompositions où $x + y + z$ est impair? D'abord, toutes les décompositions 1, en nombre X; parmi les décompositions 2, celles où le carré impair figure parmi les trois premiers; leur nombre est $\frac{3}{5}$Y.

Parmi les décompositions 3, il faut prendre celles où un ou trois carrés impairs figurent parmi les trois premiers; leur nombre est $\frac{1}{10}$Z.

On a donc

$$N_1 = X + \frac{3}{5}Y + \frac{2}{5}Z.$$

Quant à N_2, c'est le nombre des décompositions (1) où x est impair. La relation entre N_1 et N_2 est

$$N_1 + \frac{1}{2}N_2 = 9\sum d^2\left(\frac{-2}{\delta}\right).$$

D'autre part, $Y = \frac{5}{2}X$. Soit, en effet, Y' le nombre des décompositions 2 où le carré impair est le premier; $Y' = \frac{Y}{5}$. On a $X = 2Y'$, car dans une décomposition 1 on peut remplacer la somme des quatre carrés impairs qui suivent le premier par une somme de quatre carrés pairs, et l'on sait que le nombre des décompositions de $8M + 4$ en quatre carrés impairs est double de celui des décompositions en quatre carrés pairs. On en conclut $X = 2Y'$, et, par suite, $X = \frac{2}{5}Y$.

On a ainsi $Z' = 5X$. Prenons, en effet, les décompositions 3 e nombre Z', où les trois carrés impairs sont les premiers; $Z' = \frac{1}{10}Z$.

Soit une de ces décompositions :

$$m = j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + \varpi_1^2 + \varpi_2^2 + 2j_4^2 \qquad (j_i \text{ impair}, \varpi_i \text{ pair}).$$

Puisque $m \equiv 5 \pmod 8$ il faut que

$$\varpi_1 = 2n_1, \qquad \varpi_2 = 2n_2, \qquad \text{avec } n_1 + n_2 \text{ pair}.$$

Alors,

$$m = j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + 2(n_1 + n_2)^2 + 2(n_1 - n_2)^2 + 2j_4^2,$$

ou

$$m = j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + (n_1 - n_2 + j_4)^2 + (n_1 - n_2 - j_4)^2 + 2(n_1 + n_2)^2.$$

Ce qui est une décomposition I. Une Z′ donne ainsi deux décompositions I. D'où

$$X = 2Z' \qquad \text{et} \qquad X = \frac{1}{3}Z.$$

Il y a ainsi entre X, Y, Z, N_1, N_2 cinq relations qui permettent de déterminer ces quantités.

On trouve

$$N_1 = N_2 = 6\sum d^2\left(\frac{-2}{\delta}\right),$$

$$X = \frac{4}{3}\sum d^2\left(\frac{-2}{\delta}\right); \qquad Y = \frac{10}{3}\sum d^2\left(\frac{-2}{\delta}\right); \qquad Z = \frac{20}{3}\sum d^2\left(\frac{-2}{\delta}\right);$$

d'où

$$X + Y + Z = \frac{34}{3}\sum d^2\left(\frac{-2}{\delta}\right).$$

On a donc le théorème :

Le nombre des décompositions de m ($\equiv 5 \bmod 8$) en

$$m = v^2 + y^2 + x^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$$

est égal à

$$\frac{34}{3}\sum d^2\left(\frac{-2}{\delta}\right) \qquad \text{(Liouville).}$$

2° $m \equiv 7 \pmod 8$. — Même démonstration et mêmes formules. Soient :

X le nombre des décompositions (1) où v est impair, $x \ldots u$ impairs ;
Y le nombre des décompositions (1) où v est impair, un seul des $x \ldots u$ impair ;
Z le nombre des décompositions (1) où v est pair, deux des $x \ldots u$ pairs, trois impairs.

On a les mêmes relations entre les N et les X, Y, Z.

D'où le théorème :

Le nombre des décompositions de $m \equiv 5$ ou $7 \pmod 8$ *en*

$$m = n^2 + y^2 + x^2 + 2(t^2 + u^2 + v^2)$$

est

$$6 \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right).$$

3° $m \equiv 1 \pmod 8$. — On considère les décompositions

$$m = n_1^2 + \ldots + x_5^2 + 2v^2$$

et les divise en :

a. v pair ; un des x_i impairs, quatre pairs (en nombre X) ;

b. v impair, trois des x_i impairs, deux pairs (en nombre Y).

Il vient

$$N_2 = \frac{X}{5} + \frac{3}{5} Y,$$

$$N_1 = \frac{3}{5} X + \frac{4}{10} Y = \frac{3}{5} X + \frac{2}{5} Y,$$

$$N_1 + \frac{1}{2} N_2 = 7 \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right).$$

En éliminant N_1 et N_2, on obtient :

Le nombre des décompositions de $m \equiv 1 \pmod 8$ *en*

$$m = n^2 + y^2 + x^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$$

est

$$10 \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right) \qquad \text{(Liouville)}$$

4° $m \equiv 3 \pmod 8$. — Même démonstration et même résultat.

On établit ainsi la formule de Liouville :

Le nombre des représentations de m, *impair, par*

$$m = n^2 + y^2 + x^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$$

est égal à

$$\frac{2}{3}\left[16 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right] \sum d^2 \left(\frac{-2}{\delta}\right),$$

la somme portant sur les décompositions $m = d\delta$.

IV. — Mesure des classes proprement primitives ternaires, d'invariants Ω, Δ.

1. Traitons d'abord le cas du corps $\sqrt{-1}$, et supposons, pour l'instant, $\Omega\Delta$ impair. Soient $f_1, f_2, \ldots$ des représentations des classes proprement primitives (positives) ternaires, d'invariants Ω, Δ (une par classe), $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots$ leurs réciproques. Les $\bar{f}_i$ sont proprement primitives, car leur déterminant $\Delta^2\Omega$ est impair.

On désignera ici par :

ω, tout facteur premier, impair, > 1 de Ω ne divisant pas Δ;
r, tout facteur premier, impair, > 1 de Ω divisant Δ;
δ, tout facteur premier, impair, > 1 de Δ ne divisant pas Ω.

Partons de l'équation fondamentale, que l'on peut écrire

$$\sum \frac{1}{k_j \bar{f}_j^s(x, y, z)} = \frac{\Omega}{24} \Pi_\omega \left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right] \Pi_r \left[1 + \left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right]$$
$$\times \left[4 \sum \frac{1}{n^{s-2}} \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{-1}{\Omega}\right) \sum \frac{1}{n^s} \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-2}}\right].$$

Posons $s = 3 + \rho$, multiplions les deux membres de l'équation par ρ et cherchons leurs limites, quand ρ tend vers zéro, par valeurs positives (décroissantes).

2. *Limite du second membre.* — Dans le crochet, la limite du terme

$$-\left(\frac{-1}{\Omega}\right)\rho \sum \frac{1}{n^{3+\rho}} \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\rho}}$$

est zéro. Cette limite est, en effet, celle de

$$-\left(\frac{-1}{\Omega}\right) \sum \frac{1}{n^3} \lim \left[\rho \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\rho}}\right]_{\rho=0},$$

et la limite indiquée est nulle, d'après Dirichlet, car $\sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n}$ est une quantité finie.

La limite du second membre est donc

$$\frac{\Omega}{6}\Pi_\omega\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\Pi_r\left[1+\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right]\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3}\frac{\varphi(2\Omega\Delta)}{2\Omega\Delta},$$

car, d'après Dirichlet, la limite de $\varphi\sum\frac{1}{n^{1+\varphi}}$ où n parcourt les entiers positifs premiers à $2\Omega\Delta$ est $\frac{\varphi(2\Omega\Delta)}{2\Omega\Delta}$. Dans $\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3}$, n parcourt ces mêmes entiers. D'ailleurs,

$$\frac{\varphi(2\Omega\Delta)}{2\Omega\Delta}=\frac{1}{2}\Pi_\omega\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\Pi_r\left(1-\frac{1}{r}\right)\Pi_\delta\left(1-\frac{1}{\delta}\right).$$

L'expression de $\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3}$ a été donnée par Cauchy et Stephen Smith. Posons

$$Q=\Pi_\omega\omega\,\Pi_r r\,\Pi_\delta\delta.$$

Le nombre de décomposition de Q^2 en sommes de 7 carrés est

$$N_{Q^2}=448Q^3\frac{1}{\pi^4}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3},$$

n parcourant les entiers premiers à $2Q$, c'est-à-dire à $2\Omega\Delta$.

D'autre part (Smith, t. I, p. 522), on a

$$N_{Q^2}=7Q^3\Pi_\omega\left[1-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega^3}\right]\Pi_r\left[1-\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r^3}\right]\Pi_\delta\left[1-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\frac{1}{\delta^3}\right]\times 2,$$

d'où

$$\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3}=\frac{\pi^3}{32}\Pi_{\omega,\delta,r}\left[1-\left(\frac{-1}{q}\right)\frac{1}{q^3}\right].$$

Cette formule peut être établie autrement.

Smith (t. I, p. 517) calcule $\sum\left(\frac{-D}{m}\right)\frac{1}{m^3}$, m parcourant les entiers positifs premiers à $2D$.

Posons

$$V=\sum\left(\frac{-D_1}{m}\right)\frac{1}{m^3}\qquad(m\text{ positif premier à }2D_1)$$

et

$$D=D_1V^2\qquad(V^2\text{ plus grand carré divisant }D).$$

On a

$$\sum \left(\frac{-D}{m}\right)\frac{1}{m^3} = V\,H_q\left[1-\left(\frac{-D_1}{q}\right)\frac{1}{q^3}\right],$$

q désignant un facteur premier, impair, > 1 de V.

Faisons

$$D = Q^2, \qquad Q = H_\omega\, H_r\, H_\delta;$$

on a

$$D_1 = 1, \qquad V = Q;$$

de plus,

$$\sum \left(\frac{-D}{m}\right)\frac{1}{m^3} = \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3},$$

n parcourant les entiers premiers à $2\Omega\Delta$.

V est égal à $\sum \left(\frac{1}{m'}\right)\frac{1}{m'^3}$, où m' est un entier positif, impair, quelconque; on sait que $V = \frac{\pi^3}{32}$, d'où

$$\sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^3} = \frac{\pi^3}{32}\,H_{\omega,\delta,r}\left[1-\left(\frac{-1}{q}\right)\frac{1}{q^3}\right].$$

La limite finale du second membre est donc

$$\frac{\pi^3}{32}\,\frac{\Omega}{12}\,H_\omega\left[1+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\left[1-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega^3}\right]H_\delta\left(1-\frac{1}{\delta}\right)\left[1-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\frac{1}{\delta^3}\right]$$
$$\times H_r\left[1+\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right]\left[1-\frac{1}{r}\right]\left[1-\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r^3}\right].$$

3. *Limite du premier membre.* — La limite des termes provenant de $\mathfrak{F}_j$ sera $\frac{1}{k_j}\lim\frac{3T}{t}$ pour $t=\infty$, où T est le nombre des

$$\mathfrak{F}_j(x, y, z) \leqq \sqrt[3]{t}.$$

Or, $\mathfrak{F}_j(x, y, z)$ devant être premier à $2\Omega\Delta$, il faut donner à X, Y, Z les valeurs complexes

$$X = \alpha + 2Q\xi, \qquad Y = \beta + 2Q\eta, \qquad Z = \gamma + 2Q\zeta,$$

comprises dans un certain nombre N de séries (c'est-à-dire qu'il y a N systèmes α, β, γ). Q est toujours H_ω, H_r, H_δ.

Pour les X, Y, Z d'une série posons

$$\frac{X}{\sqrt[6]{l}} = x = \frac{\alpha}{\sqrt[6]{l}} + 2Q\frac{\xi}{\sqrt[6]{l}}, \qquad \ldots.$$

3T sera trois fois le volume V de l'ellipsoïde $\mathcal{F}(x, y, z) = 1$, divisé par le volume de la maille, qui est $\left(\frac{2Q}{\sqrt[6]{l}}\right)^6$. Ainsi

$$3T = \frac{3V}{2^6 Q^6} l \qquad \text{ou} \qquad \frac{3T}{l} = \frac{3V}{64Q^6}.$$

D'ailleurs, V se calculerait aisément; il vaut mieux le prévoir *a priori*. Prenons la forme

$$\mathcal{F} = xx_0 + \Delta yy_0 + \Omega\Delta zz_0,$$

réciproque de

$$f = \Omega\Delta xx_0 + \Omega yy_0 + zz_0,$$

d'invariants Ω et Δ. Le volume de la sphère

$$X_1^2 + \ldots + X_6^2 = a^2$$

est $\frac{\pi^3}{6}a^6$; pour l'ellipsoïde

$$xx_0 + \Delta yy_0 + \Omega\Delta zz_0 = 1,$$

ce sera

$$\frac{\pi^3}{6}\frac{1}{\Omega\Delta^2} \; (= V).$$

La limite du premier membre est donc

$$V\left(\sum \frac{1}{k_j}\right)\frac{3}{64Q^6}\frac{\pi^3}{6}\frac{1}{\Omega\Delta^2}$$

ou

$$V\left(\sum \frac{1}{k_j}\right)\frac{\pi^3}{128\Omega\Delta^2 Q^6},$$

et tout revient à calculer V.

4. *Calcul de* V. — On établit, comme pour les formes ternaires réelles, que $\mathcal{F}$, d'invariants Δ, Ω, vérifie la congruence

$$(2) \qquad \mathcal{F} \equiv \alpha xx_0 + \beta\Delta yy_0 + \gamma\Omega\Delta zz_0 \qquad (\text{mod } 2\Omega\Delta).$$

où α, β, γ sont trois entiers ordinaires vérifiant

$$\alpha\beta\gamma \equiv 1 \pmod{2\Omega\Delta}.$$

Au premier membre, $\mathcal{F}$ est $\mathcal{F}(x, y, z)$, et la congruence a lieu quels que soient x, y, z du corps $\sqrt{-1}$, les mêmes dans les deux membres.

Il faut étudier dans quels cas (c'est-à-dire pour quels x, y, z) $\mathcal{F}$ est premier à $2\Omega\Delta$, c'est-à-dire aux facteurs r, δ, ω, 2.

1° Pour que $\mathcal{F}$ soit premier à r, il faut et il suffit, d'après (2), que xx_0 soit premier à r, y et z étant quelconques. Or, la congruence

$$xx_0 \equiv 1, 2, \ldots, (r-1) \pmod{r}$$

a, quel que soit le second membre choisi,

$$r - \left(\frac{-1}{r}\right) \text{ solutions} \qquad \text{(Hermite)}.$$

On a donc

$$(r-1)\left[r - \left(\frac{-1}{r}\right)\right] \text{ solutions} \pmod{r},$$

pour x, y et z étant d'ailleurs quelconques. y et z peuvent prendre chacun (mod r) un nombre de valeurs égal à r^2; donc, le nombre des systèmes de valeurs de x, y, z (mod r) tels que $\mathcal{F}$ soit premier à r est

$$r^3(r-1)\left[r - \left(\frac{-1}{r}\right)\right].$$

2° Même résultat avec δ; pour que $\mathcal{F}$ soit premier à δ, il faut donner à x (y et z étant quelconques)

$$(\delta-1)\left[\delta - \left(\frac{-1}{\delta}\right)\right] \text{ valeurs} \pmod{\delta}.$$

De même que précédemment, le nombre des systèmes de valeurs de x, y, z (mod δ), tels que $\mathcal{F}$ soit premier à δ, est

$$\delta^3(\delta-1)\left[\delta - \left(\frac{-1}{\delta}\right)\right].$$

3° Pour que $\mathcal{F}$ soit premier à ω, distinguons deux cas :

a. Supposons $yy_0 \equiv 0 \pmod{\omega}$. Combien cela donne-t-il de valeurs $\pmod{\omega}$ pour y?

Le nombre total des valeurs de $y \pmod{\omega}$, puisque $y = y_1 + iy_2$ est ω^2; le nombre des valeurs de $y \pmod{\omega}$ telles que $yy_0 \not\equiv 0 \pmod{\omega}$ est (d'après 1°)

$$(\omega - 1)\left[\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right].$$

Donc, le nombre des valeurs cherchées de $y \pmod{\omega}$ est

$$\omega^2 - (\omega - 1)\left[\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right] \quad \text{ou} \quad \omega\left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right] - \left(\frac{-1}{\omega}\right),$$

y ayant une de ces valeurs, pour que $\bar{y}$ soit premier à ω, il faut donner à x un nombre de valeurs égal, par ce qui précède, à

$$(\omega - 1)\left[\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right].$$

Combinant ces valeurs de x et de y, et donnant à z une valeur quelconque $\pmod{\omega}$, on trouve ainsi, pour x, y, z, un nombre de systèmes égal à

$$(\omega) \qquad \omega^2(\omega - 1)\left[\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right]\left\{\omega\left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right] - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right\}.$$

b. Supposons $yy_0 \not\equiv 0 \pmod{\omega}$. Cela donne, pour $y \pmod{\omega}$, un nombre de valeurs égal à $(\omega - 1)\left[\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right)\right]$ par 1°.

D'autre part, la congruence

$$\alpha z_0 + \beta \Delta yy_0 \equiv 0 \pmod{\omega}$$

a, en x,

$$\omega - \left(\frac{-1}{\omega}\right) \text{ solutions} \qquad \text{(Hermite)};$$

l'incongruence

$$\alpha x x_0 + \beta \Delta yy_0 \not\equiv 0 \pmod{\omega}$$

en a donc un nombre égal à $\omega^2 - \omega + \left(\frac{-1}{\omega}\right)$.

On trouve ainsi, en tenant compte de z, qui est quelconque, un

nombre de systèmes $x, y, z \pmod{\omega}$ égal à

$$(\omega'') \qquad \omega^2(\omega-1)\left[\omega-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\right]\left[\omega^2-\omega+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\right].$$

La somme de (ω') et (ω'') est

$$\omega^2(\omega-1)\left[\omega-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\right]\left[\omega+\left(\frac{-1}{\omega}\right)\right]\omega$$

ou

$$\omega^3(\omega-1)(\omega^2-1).$$

Tel est le nombre des systèmes $x, y, z \pmod{\omega}$ pour lesquels $\mathfrak{F}$ est premier à ω.

4° Reste le facteur 2. Puisque α, β, γ sont impairs, pour que $\mathfrak{F}$ soit impair, il faut et il suffit que $xx_0+yy_0+zz_0$ le soit, d'où 32 systèmes $x, y, z \pmod{2}$.

Il résulte de là que le nombre des systèmes $x, y, z \pmod{2Q}$, tels que $\mathfrak{F}$ soit premier à $2Q$, est

$$\begin{aligned} N = {} & 32\,\Pi_\omega\,\omega^3(\omega-1)(\omega^2-1) \\ & \times \Pi_\delta\,\delta^2(\delta-1)\left[\delta-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\right]\Pi_r\,r^2(r-1)\left[r-\left(\frac{-1}{r}\right)\right]. \end{aligned}$$

3. *Expression de la mesure.* — En remplaçant N par sa valeur, on obtient pour la limite du premier membre :

$$\begin{aligned} \left(\sum\frac{1}{k_j}\right)\frac{\pi^4}{128\,\Omega\Delta^2 Q^6} = {} & 32\,\Pi_\omega\,\omega^3(\omega-1)(\omega^2-1) \\ & \times \Pi_\delta\,\delta^2(\delta-1)\left[\delta-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\right]\Pi_r\,r^2(r-1)\left[r-\left(\frac{-1}{r}\right)\right]. \end{aligned}$$

D'ailleurs,

$$Q = \Pi_\omega\,\omega\,\Pi_r\,r\,\Pi_\delta\,\delta.$$

Égalant à la limite du second membre on trouve, tous calculs faits,

$$\sum\frac{1}{k_j} = \frac{1}{96}\,\Omega^2\Delta^2\,\frac{\Pi_\omega\left[1-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega^3}\right]\Pi_\delta\left[1-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\frac{1}{\delta^3}\right]\Pi_r\left[1-\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r^3}\right]\Pi_r\left[1-\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right]}{\Pi_\omega\left[1-\left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega}\right]\Pi_\delta\left[1-\left(\frac{-1}{\delta}\right)\frac{1}{\delta}\right]\Pi_r\left[1-\left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right]}.$$

On a ainsi l'expression de la mesure de l'ensemble des classes pro-

prement primitives, positives, d'Hermite (corps $\sqrt{-1}$) d'invariants $\Omega\Delta$ impairs :

$$M(\Omega, \Delta) = \frac{1}{96}\Omega^2\Delta^2\Pi_\omega\left[1 + \left(\frac{-1}{\omega}\right)\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right]$$
$$\times \Pi_\delta\left[1 - \left(\frac{-1}{\delta}\right)\frac{1}{\delta^3}\right]\Pi_r\left[1 - \left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r^3}\right]\Pi_r\left[1 - \left(\frac{-1}{r_1}\right)\frac{1}{r}\right];$$

ω, facteur premier (impair) > 1 de Ω, ne divisant pas Δ;
δ, facteur premier (impair) > 1 de Δ, ne divisant pas Ω;
r, facteur premier (impair) > 1, commun à Ω et à Δ.

On remarque que $M(\Omega, \Delta) = M(\Delta, \Omega)$, ce qui était évident, *a priori*.

6. *Vérifications.* — 1° $\Omega = \Delta = 1$. On trouve

$$M(\Omega, \Delta) = \frac{1}{96}.$$

La classe $xx_0 + yy_0 + zz_0$ admet un nombre d'automorphies égal à $4.4.1.2.3 = 96$.

C'est la seule classe $(1, 1)$.

2° $\Omega = 1$, $\Delta = 3$. On trouve

$$M(1, 3) = \frac{9}{96}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = \frac{7}{96}.$$

On a les deux classes

$$xx_0 + yy_0 + 3zz_0 \qquad (k = 32),$$
$$xx_0 + 2yy_0 + yz_0 + y_0z + 2zz_0 \qquad (k = 24)$$

et

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{24} = \frac{7}{96}.$$

7. *Cas de $\Omega\Delta$ pair.* — Les calculs sont analogues. On a, au second membre de la formule initiale, au lieu de $\frac{4}{24}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{6}$, le facteur $\frac{1}{8}$, en vertu de l'expression obtenue plus haut dans le cas $\Omega\Delta$ pair.

Donc, la formule ci-dessus subsiste, mais avec $\frac{3}{4.96}$ ou $\frac{1}{128}$ au lieu de $\frac{1}{96}$, au second membre.

Vérifications :

1° $\Omega = 1, \qquad \Delta = 2, \qquad M(1, 2) = \frac{1}{32}.$

La classe $xx_0 + yy_0 + 2zz_0$ a 32 automorphies. C'est donc la seule classe (1, 2).

2° $\Omega = 2, \qquad \Delta = 2, \qquad M(2, 2) = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}.$

On a les deux classes

$$xx_0 + 2yy_0 + 4zz_0 \qquad (k = 16),$$
$$2xx_0 + 2yy_0 + (1+i)yz_0 + (1-i)yz_0 + 3zz_0 \qquad (k = 16)$$

(le nombre des automorphies de

$$2yy_0 + (1+i)yz_0 + (1-i)yz_0 + 3zz_0$$

est en effet $k' = 4$).

D'où la conclusion :

« Le nombre de représentations de $2m$ (m impair) par

$$2m = y_1^2 + y_2^2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4z_1^2 + 4z_2^2 \qquad (\text{où } z_1 + z_2 \text{ est pair})$$

et

$$2m = y_1^2 + y_2^2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4z_1^2 + 4z_2^2 \qquad (\text{où } z_1 + z_2 \text{ est impair}),$$

c'est-à-dire le nombre total des représentations

$$2m = y_1^2 + y_2^2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4z_1^2 + 4z_2^2,$$

est

$$4\sum d^2\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

étendu aux décompositions $m = d\delta$. »

Cette formule est connue (démonstration par le développement de $\eta_1^2\theta_1^4$).

8. *Corps* $\sqrt{-2}$. — Le calcul de $\sum\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{1}{n^3}$, où n parcourt les nombres impairs, est donné par une formule de Stephen Smith (t. I, p. 518). On trouve

$$\Lambda = \pi^3\frac{3}{64\sqrt{2}}.$$

La formule de la mesure, dans le corps $i\sqrt{2}$, pour les formes d'Hermite ternaires, positives, proprement primitives, d'invariants Ω et Δ impairs, premiers entre eux, est

$$M(\Omega, \Delta) = \frac{1}{64} \times 2^2 \Omega^2 \Delta^2 H_q \frac{1 - \left(\frac{-2}{q}\right)\frac{1}{q^3}}{1 - \left(\frac{-2}{q}\right)\frac{1}{q}},$$

q étant un facteur premier, positif, > 1 de $\Omega\Delta$.

9. *Remarque.* — La formule $M(\Omega, \Delta)$ est plus simple pour les formes d'Hermite que pour les formes ternaires du champ réel; cela tient à ce qu'il n'y a pas de genres pour les formes d'Hermite.

V. — Mesure des classes, primitives ou non, mais propres, positives, de déterminant donné.

1. *Mesure des classes proprement primitives de déterminant donné.* — Supposons donné, au lieu des invariants Ω et Δ, le déterminant $D(= \Omega^2\Delta)$, et D impair.

Considérons toutes les décompositions

$$D = \Omega^2 \Delta.$$

Pour l'une d'elles, les ω, δ, r sont les facteurs premiers (> 1) de D; appelons-les p. Appelons toujours r les facteurs premiers > 1 communs à Ω et Δ; nous avons

$$96 M(\Omega, \Delta) = D^2 H_p \frac{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^3}}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}} \frac{1}{\Omega^2} H_r \left[1 - \left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right].$$

Sommons pour toutes les décompositions $D = \Omega^2\Delta$; il vient

$$96 M(D) = D^2 H_p \sum \frac{1}{\Omega^2} H_r \left[1 - \left(\frac{-1}{r}\right)\frac{1}{r}\right].$$

Or, soient

$$D = p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots, \qquad \Omega = p^\beta p'^{\beta'} \ldots, \qquad \Delta = p^{\alpha-2\beta} \ldots$$

Le facteur p est commun à Ω et Δ si $\rho > 0$ et $\alpha - 2\rho > 0$; il ne l'est pas si $\rho = 0$ ou si $2\rho = \alpha$.

Calculons la somme $\sum$, en distinguant les cas de α impair et α pair.

1° α impair; 2ρ ne peut être α; on a donc

$$\rho = 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha - 1}{2}.$$

Alors, dans $\frac{1}{\Omega^2} H_p$, on a, provenant du facteur p, les termes

$$(1) \quad 1, \quad \frac{1}{p^2}\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right], \quad \frac{1}{p^4}\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right], \quad \ldots, \quad \frac{1}{p^{\alpha-1}}\left[1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right].$$

On voit aisément que $\sum$ est un produit étendu aux facteurs $p, p', \ldots$. Si α est impair, le terme du produit qui répond à p est la somme des quantités (1), c'est-à-dire

$$1 - \left[1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\left(\frac{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{\alpha-1}}}{1 - \frac{1}{p^2}}\right),$$

ou

$$1 - \frac{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{\alpha+1}}}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^{\alpha+1}}}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}};$$

2° α pair :

$$\rho = 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha}{2};$$

d'où, dans $\frac{1}{\Omega^2} H_p$, provenant de p, les termes

$$1, \quad \frac{1}{p^2}\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right], \quad \ldots, \quad \frac{1}{p^{\alpha-2}}\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right], \quad \frac{1}{p^\alpha}$$

de somme

$$1 + \frac{1}{p^\alpha} - \left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]\frac{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^\alpha}}{1 - \frac{1}{p^2}},$$

ou

$$1 - \frac{1}{p^\alpha} = \frac{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^\alpha}}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{\alpha+1}}}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}}.$$

On a donc ainsi

$$96\,\mathrm{M}(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^2 \mathrm{H}_p \left\{ \frac{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^3}}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \gamma_i \frac{1}{p^{\alpha+1}}}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}} \right\},$$

γ_i étant 1 si α est impair, et $\left(\frac{-1}{p}\right)$ si α est pair; donc, en général, $\gamma_i = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\alpha-1}$ et finalement

$$96\,\mathrm{M}(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^2 \mathrm{H}_p \frac{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^3}}{\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]^2} \left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{\alpha+1}}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\alpha+1}\right]$$

$$(\mathrm{D} = p^\alpha p'^{\alpha'} \ldots;\ \mathrm{D} \text{ impair}),$$

formule assez compliquée, qui donne la mesure de l'ensemble des classes ternaires d'Hermite, positives, proprement primitives, de déterminant D, impair.

2. *Passage aux classes primitives ou non.* — Soit $(a, a', a'', \ldots)$ une réduite proprement primitive (une réduite par classe) ternaire de déterminant

$$aa'a'' + \ldots \quad \text{impair}.$$

Soit k le nombre de ses automorphies; nous aurons la relation fondamentale (déduite de la mesure)

$$96 \sum \frac{1}{k(aa'a'' + \ldots)^2} = \sum \frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}} \mathrm{H}_p.$$

Au premier membre, $\sum$ s'étend à toutes les réduites $(a, a', a'', \ldots)$ ternaires d'Hermite, positives, proprement primitives, des déterminants $(aa'a'' + \ldots)$ impairs; k est le nombre d'automorphies de la

réduite $(a, a', a'', \ldots)$; au second membre, $\sum$ s'étend à tous les entiers positifs impairs D, et $D = p^{\alpha} p'^{\alpha'} \ldots$.

Remplaçons au second membre D par $p^{\alpha} p'^{\alpha'} \ldots$, on voit de suite que ce second membre est un produit étendu aux nombres premiers impairs p, p' et que le facteur qui répond à p est

$$1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha(s-2)}} \frac{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^3}}{\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]^2} \left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^{\alpha+1}}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\alpha+1}\right].$$

Sommant les progressions géométriques, on trouve pour ce facteur

$$1 + \frac{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^3}}{\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]^2} \left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right] \frac{\frac{1}{p^{s-2}}}{1 - \frac{1}{p^{s-2}}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^3}}{\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right]^2} \frac{1}{p}\left(\frac{-1}{p}\right) \frac{\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-1}}}{1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-1}}}$$

et, tous calculs faits,

$$\frac{1 + \frac{1}{p^s} - \frac{1}{p^{2s}}}{\left[1 - \frac{1}{p^{s-2}}\right]\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-1}}\right]}.$$

On a ainsi

$$96 \sum \frac{1}{h(aa'a'' + \ldots)^s} = \Pi_p \frac{1 - \frac{1}{p^{3s}}}{\left[1 - \frac{1}{p^s}\right]\left[1 - \frac{1}{p^{s-2}}\right]\left[1 - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p^{s-1}}\right]}.$$

Le second membre s'écrit, n parcourant les entiers positifs impairs,

$$\frac{1}{\sum \frac{1}{n^{3s}}} \sum \frac{1}{n^s} \sum \frac{1}{n^{s-2}} \sum \left(\frac{-1}{n}\right) \frac{1}{n^{s-1}}.$$

Chassant $\frac{1}{n^{3s}}$, on obtient la relation

$$96 \sum \frac{1}{h[\lambda\lambda'\lambda'' + \ldots]^s} = \sum \frac{1}{n^s} \sum \frac{1}{n^{s-2}} \sum \left(\frac{-1}{n}\right) \frac{1}{n^{s-1}}.$$

Au premier membre, $\sum$ s'étend à toutes les réduites ternaires $(A, A', A'', \ldots)$ positives d'Hermite (des déterminants $AA'A''+\ldots$) primitives ou non, mais propres, c'est-à-dire que $AA'A''$ ne sont pas pairs à la fois; k est le nombre d'automorphies de la réduite $(A, A', A'', \ldots)$. Au second membre, n parcourt, dans les $\sum$, les entiers positifs impairs.

5. *Mesure des classes primitives ou non.* Égalant dans les deux membres les coefficients de $\frac{1}{D^s}$, on a la formule suivante :

« La mesure des classes d'Hermite ternaires, positives, primitives ou non, mais propres, de déterminant D donné, impair, est

$$\frac{1}{96}\sum d^2\left(\frac{-1}{d}\right)d',$$

la $\sum$ s'étendant aux décompositions $D = d\,d'd''$ ou

$$\frac{1}{96}S\left\{d\left(\frac{-1}{d}\right)\zeta_2\left(\frac{D}{d}\right)\right\} \quad \text{ou} \quad \frac{D}{96}\left(\frac{-1}{D}\right)S_d\left\{\zeta_2(d)\frac{1}{d}\left(\frac{-1}{d}\right)\right\};$$

S s'étend aux diviseurs d de D, et $\zeta_2(n)$ désigne la somme des carrés des diviseurs de n. »

On peut écrire aussi

$$\sum\frac{\mathfrak{M}_3(D)}{D^s} = \frac{1}{96}\sum\frac{1}{n^s}\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\frac{1}{n^{s-1}}\left(\frac{-1}{n}\right),$$

D impair, n impair quelconque (positifs).

Pour les classes binaires, avec les mêmes notations, on a trouvé

$$\sum\frac{\mathfrak{M}_2(D)}{D^s} = \frac{1}{8}\sum\frac{1}{n^{s-1}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s}$$

ou

$$\sum\frac{\mathfrak{M}_2(D)}{D^{s-1}} = \frac{1}{8}\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-1}}.$$

On en conclut :

$$\mathfrak{M}_3(D) = \frac{1}{12}\sum d\,\mathfrak{M}_2(d),$$

la somme étant étendue aux diviseurs d de D.

VI. — Évaluation arithmétique du volume du domaine de réduction ternaire (corps $\sqrt{-1}$).

Reprenons la formule

$$\sum \frac{1}{k[AA'A''+\ldots]^s} = \frac{1}{96}\sum\frac{1}{n^s}\sum\frac{1}{n^{s-2}}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^{s-1}}.$$

Au premier membre, la $\sum$ s'étend à toutes les réduites positives ternaires d'Hermite, de l'ordre propre $(A, A', A'', \ldots)$ des déterminants $AA'A''+\ldots$ impairs; k est le nombre d'automorphies de la réduite $(A, A', A'', \ldots)$ (une seule réduite par classe). Au second membre, n est un nombre positif impair quelconque.

Faisons $s = 3 + \rho$, multiplions par ρ et faisons tendre ρ vers zéro par valeurs positives décroissantes.

La limite du second membre est

$$\frac{1}{96}\sum\frac{1}{n^3}\sum\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^2}\frac{1}{2}.$$

Cherchons la limite du premier membre.

Nous prendrons seulement les termes où $k = 1$; nous verrons ensuite que les autres n'ont effectivement pas à intervenir.

Les inégalités de réduction sont

$$F_j(A, A', A'', \ldots) \geqq 0;$$

elles sont linéaires et homogènes en A, A', A''; B_1, B_2, ...; en posant

$$B = B_1 + iB_2 \quad \text{et} \quad A \geqq 0, \quad A' \geqq 0, \quad A'' \geqq 0.$$

Les A, B prennent au premier membre toutes les valeurs entières réelles vérifiant

$$F_j \geqq 0, \qquad A, A', A'' \geqq 0,$$

A, A', A'' non pairs à la fois, et $AA'A''+\ldots$ impairs.

Cherchons combien il y a de systèmes de valeurs (mod 2) des A, B vérifiant ces deux dernières conditions.

Le déterminant est

$$AA'A'' + BB'B'' + B_0B'_0B''_0 - ABB_0 - A'B'B'_0 - A''B''B''_0.$$

Sa parité est celle de

$$AA'A'' - A(B_1^2 + B_2^2) - A'(B_1'^2 + B_2'^2) - A''(B_1''^2 + B_2''^2).$$

Distinguons différents cas :

a. A, A′, A″ impairs. — Il faut $B_1 + B_2 + B'_1 + B'_2 + B''_1 + B''_2$ pair. D'où, pour les B, 32 systèmes (mod 2).

b. A pair, A′, A″ impairs. — Il faut $B'_1 + B'_2 + B''_1 + B''_2$ impair. D'où, pour $B_1, B_2, \ldots$, 8 systèmes (mod 2), 2 pour les B_1, 2 pour les B_2, en tout 32.

c. B′ pair, A, A″ impairs. — On trouve de même 32 systèmes pour les B.

d. A″ pair, A′, A″ impairs. — On trouve de même 32 systèmes pour les B.

e. A impair, A′, A″ pairs. — Il faut $B_1^2 + B_2^2$ impair; d'où 2 systèmes (mod 2) pour B_1 et B_2; les $B'_1, \ldots, B''_2$ étant quelconques (mod 2). Cela fait $2.2^4 = 32$ systèmes pour les B, ..., B″.

f. A′ impair, A′, A″ pairs. — Même résultat.

g. A″ impair, A, A′ pairs. — Même résultat.

En tout, on obtient 32×7 systèmes (mod 2) pour les A, ..., B″. Prenons un de ces systèmes; on a

$$A = \alpha + 2a, \qquad B''_2 = \beta''_2 + 2b''_2,$$

les α, β''_2 étant fixes, les $a, \ldots, b''_2$ entiers réels quelconques.

La limite de la somme des termes correspondants du premier membre est celle, pour $t = \infty$ de $\frac{3T}{t}$, où T est le nombre des $AA'A'' + \ldots$ qui sont $\leqq \sqrt[3]{t}$.

Posons

$$\mathfrak{a} = \frac{A}{\sqrt[9]{t}} = \frac{\alpha}{\sqrt[9]{t}} + \frac{2a}{\sqrt[9]{t}}, \qquad \ldots.$$

On aura

$$F_j(\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}''_2) \leqq 0,$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'' = 0,$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'' + \ldots + \mathfrak{a}''\mathfrak{b}''\mathfrak{b}''_0 \leqq 1$$

et limite

$$\frac{3T}{t} = \frac{32V}{2^9},$$

où

$$V = \int_9 da\, da' \ldots db''_2,$$

l'intégrale étant étendue au volume défini par

$$F_j[a, a', \ldots] \leqq 0 \qquad (a \leqq 0,\ a' \geqq 0,\ a'' \leqq 0),$$
$$aa'a'' + \ldots = 1.$$

La limite totale du premier membre est donc

$$32 \times 7 \frac{3V}{2^9}.$$

Égalant à celle du second membre, nous avons

$$7.32 \frac{3V}{2^9} = \frac{1}{96} \cdot \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n^3} \sum \left(\frac{-1}{n}\right) \frac{1}{n^2};$$

d'où

$$V = \frac{1}{7.63} \sum \frac{1}{n^3} \sum \left(\frac{-1}{n}\right) \frac{1}{n^2},$$

n, dans les $\sum$, parcourant les entiers positifs impairs.

Nota. — Les termes où $k > 1$ correspondent à des réduites dont le point représentatif $(A, A', \ldots, B''_2)$ est, dans l'espace à 9 dimensions, sur une face (ou une arête) du volume V. Donc, il n'y a pas lieu d'en tenir compte dans le calcul de V.

Remarque. — Si l'on désigne par $\mathcal{R}$ le volume de réduction de l'espace à 9 dimensions des formes ternaires positives d'Hermite, c'est-à-dire la région de l'espace où est le point $(a, a', a'', \ldots, b''_2)$, la réduite étant $(a, a', a'', \ldots, b''_2)$, $\mathcal{R}$ est un volume conique ayant l'origine pour sommet. Dans $\mathcal{R}$, on prend la région où sont les points $(a, a', \ldots, b''_2)$ qui répondent aux réduites de déterminant -1; le volume de cette région est V.

Transformations of surfaces applicable to a quadric;

By LUTHER PFAHLER EISENHART (Princeton).

If a conjugate system of curves, or *net*, N on a surface S and a congruence G of straight lines are so related that the developables of G meet S in N, the net and congruence are said to be *conjugate*. Two nets conjugate to the same congruence are said to be in the relation of a *transformation* T, if the nets are not parallel. In a previous paper (1) the author developed a general theory of transformations T. When two surfaces S and $\overline{S}$ are applicable, there is a unique net on S which remains a net as S is deformed into $\overline{S}$; we call it the *permanent net* on S for the deformation. Let N and $\overline{N}$ denote these nets. Peterson (2) showed that if a net N' parallel to N is known, a net $\overline{N}'$ parallel to $\overline{N}$ can be found by quadratures such that N' and $\overline{N}'$ are applicable. In a former paper (3) the author showed that when two such parallel nets N' and $\overline{N}'$ are known, two new applicable nets N_1 and $\overline{N}_1$ can be found by a quadrature such that N_1 and $\overline{N}_1$ are T transforms of N and $\overline{N}$ respectively. Subsequently (4) the author applied these results to the case where N is a permanent net in a

(1) *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, vol. XVIII, 1917, p. 97-124. — This paper will be referred to as M_1.

(2) *Ueber Curven und Flachen* (Moskau and Leipzig), 1868, p. 106.

(3) *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, vol. XIX, 1918, p. 167-185. — This paper will be referred to as M_2.

(4) *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, vol. XX, 1919, p. 323-338. — This paper will be referred to as M_3.

deformation of a quadric, and by making use of the theory of orthogonal nets in higher spaces established the following theorems :

THEOREM I. — *If* $\overline{N}$ *is a net applicable to a net* N *on a quadric* Q, *there exist an infinity of sets of* ∞^2 T *transforms* $\overline{N}_1$ *of* $\overline{N}$ *which are applicable to nets on* Q; *these transforms are conjugate to* ∞^2 *congruences* G; *their determination requires the solution of a completely integrable system of eight equations.*

THEOREM II. — *If* $\overline{N}$ *is a net applicable to a net* N *on a central quadric* Q, *not of revolution, there can be found by the solution of a Riccati equation and quadratures three families each of* ∞^2 T *transforms* $\overline{N}_1$ *applicable to nets on* Q; *the transforms of each family are conjugate to* ∞^1 *congruence* G, *there being* ∞^1 *transforms conjugate to each congruence* G; *the lines of the congruences* G *through a point of* $\overline{N}$ *form a quadric cone; the tangent planes at points of a line of* G *to the nets* $\overline{N}_1$ *conjugate to it envelop a quadric cone and the points on* Q *corresponding to these points of the nets* $\overline{N}_1$ *on a line of* G *lie on a conic.*

THEOREM III. — *If* $\overline{N}_1$ *and* $\overline{N}_2$ *are transforms of a net* $\overline{N}$ *applicable to a net* N *on a quadric* Q *by means of transformations* T_{k_1} *and* T_{k_2} $(k_1 \neq_2 k_2)$, *there can be found without quadratures a net* $\overline{N}_{12}$ *applicable to a net* N_{12} *on* Q *which is in the relations of transformations* T'_{k_2} *and* T'_{k_1} *with* N_1 *and* N_2 *respectively.*

It was pointed out that when Q is a central quadric, the transformations T_k of $\overline{N}$ are the transformations discovered by Guichard (¹) in an entirely different manner. However, this method did not reveal the relations between the nets on Q.

In the first part of the present paper we establish Theorems I and II by a method different from that used in the former paper. Thus in § 4 we determine the transformations T_k of a permanent net N on a

(¹) *Mémoire sur la déformation des quadriques* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, vol. XXXIV, 1909).

quadric into permanents nets N_1 on the same quadric, and in § 5 show that when such a transformation is known there follows directly a transformation T_k of $\overline{N}$ applicable to N into $\overline{N}_1$ applicable to N_1. These results are developed for all types of quadrics.

In another paper read before the Strasbourg Congress (¹) it was shown that certain pairs of solutions of the point equation of an R net N determine a new net $\widehat{N}$ such that N and $\widehat{N}$ lie on the focal sheets of a W congruence; in this case we called $\widehat{N}$ a W *transform of* N. In § 5 it is shown that a net $\overline{N}$ applicable to a net N on a quadric is an R net, and in §§ 6, 7 that certain pairs of functions determining two T_k transforms of N determine also a W transform of N into a net applicable to a net on the given quadric. These transformations are in fact the transformations B_k, discovered by Bianchi (²). Furthermore it is established in § 8 that the transformations T_k and B_k are permutable, that is, if $\overline{N}_1$ and $\widehat{N}$ are respectively T_k and B_k transforms N, there can be found a net $\widehat{N}_1$ which is a T_k transform of $\widehat{N}$ and a B_k transform of N_1.

In § 9 it is shown that the transformations T_k are permutable also with the transformations H of Bianchi (³).

1. *Transformations* T *of applicable nets.* — If N is a net, the cartesian coordinates, x, y, z, of the net satisfy an equation of the form

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \log a}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \log b}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{1}$$

A net N' is said to be *parallel* to N when its tangents are parallel to the corresponding tangents to N. If x', y', z' are the coordinates

(¹) *Conjugate nets* R *and their transformations* (*Annals of Mathematics*, ser. 2, vol. XXII, 1921); also an abstract in the proceedings of the Congress. — This paper will be referred to as M_2.

(²) *Lezioni di geometria differenziale*, vol. III. — This book will be referred to as *B*.

(³) *B.*, p. 214.

of N′, then

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = h\dfrac{\partial x}{\partial u}, & \dfrac{\partial y'}{\partial u} = h\dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial z'}{\partial u} = h\dfrac{\partial z}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial x'}{\partial v} = l\dfrac{\partial x}{\partial v}, & \dfrac{\partial y'}{\partial v} = l\dfrac{\partial y}{\partial v}, & \dfrac{\partial z'}{\partial v} = l\dfrac{\partial z}{\partial v}, \end{cases}$$

where h and l are a pair of solutions of

$$(3)\qquad \frac{\partial h}{\partial v} = (l-h)\frac{d\log\alpha}{\partial v}, \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = (h-l)\frac{\partial\log h}{\partial u}.$$

Conversely, every pair of solutions of (3) determines a parallel net N′.

We call equation (1) the *point equation* of N. The coordinates of N′ satisfy a similar equation. Moreover, to each solution θ of (1) there *corresponds* a solution θ' of the point equation of N′. It is determined by

$$(4)\qquad \frac{\partial\theta'}{\partial u} = h\frac{\partial\theta}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\theta'}{\partial v} = l\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

If θ and θ' are any pair of *corresponding solutions* of the point equations of N and N′, the functions x_1, y_1, z_1, defined by equations of the form

$$(5)\qquad x_1 = x - \frac{\theta}{\theta'}x'$$

are the cartesian coordinates of a nat N_1 which is a T transform of N. Conversely, the most general transformation T is defined in this way [1]. By means of the above formulas we establish the following relations :

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 - \dfrac{\theta}{\theta'\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\theta}{\theta'}\right)}\dfrac{\partial x_1}{\partial u} = x - \dfrac{\theta}{\dfrac{\partial\theta}{\partial u}}\dfrac{\partial x}{\partial u}, \\[3ex] x_1 - \dfrac{\theta}{\theta'\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\theta}{\theta'}\right)}\dfrac{\partial x_1}{\partial v} = x - \dfrac{\theta}{\dfrac{\partial\theta}{\partial v}}\dfrac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

---

[1] M_1, p. 109.

Consequently the tangents to the curves $v = \text{const.}$ or $u = \text{const.}$ at corresponding points of N and N_1 meet in the points P_1 or P_2, whose coordinates are of the above forms. If we take another transformation T given by (5) with θ replaced by another solution θ_1 of (1), we find that the tangent plane to the transform meets the corresponding tangent planes to N and N_1 in the point whose coordinates ξ, η, ζ, are of the form

$$(6') \qquad \xi = x - \frac{\left(\theta_1 \frac{\partial \theta}{\partial v} - \theta \frac{\partial \theta_1}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - \left(\theta_1 \frac{\partial \theta}{\partial u} - \theta \frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial \theta_1}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta_1}{\partial v}}.$$

From the form of this expression it follows that this point lies also on the tangent plane to the transform of N whose coordinates are of the form obtained by replacing θ in (5) by $\theta + c\theta_1$, where c is any constant, and θ' by a solution of the corresponding equations (4). Hence the corresponding tangent planes of the transforms obtained by varying c envelop a cone. Moreover, the point of coordinates ξ, η, ζ generates a *derived net* of N (¹).

If a net admits an applicable net, either net is said to be a *permanent* net. If $\overline{N}$ is a net applicable to N, its coordinates, $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, satisfy (1). Moreover, the net $\overline{N}'$ whose coordinates are given by quadratures of the form

$$(7) \qquad \frac{\partial \overline{x}'}{\partial u} = h\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \overline{x}'}{\partial v} = l\frac{\partial \overline{x}}{\partial v},$$

is parallel to $\overline{N}$ and is applicable to N'. Furthermore, the net whose coordinates $\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1$ are defined by equations of the form

$$(8) \qquad \overline{x}_1 = \overline{x} - \frac{\theta}{\theta'}\overline{x}_1$$

is a T transform of N (²).

(¹) M_4.
(²) M_2, p. 170.

The common point equation of N' and $\overline{N}'$ admits the solution

$$\theta' = k(\Sigma x'^2 - \Sigma \overline{x}'^2), \tag{9}$$

where k is a constant, the symbol Σ indicating the sum of three terms obtained from the three corresponding coordinates. We have shown [1] that for this value of θ' and the corresponding function θ, given by (4), the nets N_1 and $\overline{N}_1$ are applicable.

2. *Transformations* T *of nets on a quadric.* — Consider a net N on the general quadric, Q, whose equation is

$$ex^2 + fy^2 + gz^2 + 2axy + 2byz + 2czx + 2rx + 2sy + 2tz + w = 0. \tag{10}$$

Since the coordinates are solutions of an equation of the form (1), we have on differentiating (10) with respect to u and v

$$\begin{aligned} e\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + f\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + g\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + a\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) \\ + b\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + c\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Any net $N'(x')$ parallel to N is given by equations of the form (2). Consequently we have an equation of the form (11) in which x, y, z, are replaced by x', y', z'. From this it follows that the function

$$\theta' = ex'^2 + fy'^2 + gz'^2 + 2ax'y' + 2by'z' + 2cz'x' \tag{12}$$

is a solution of the point of equation of N' [2]. It is readily found that θ' and θ, given by

$$\begin{aligned} \theta = 2[exx' + fyy' + gzz' + a(x'y + xy') + b(y'z + yz') \\ + c(z'x + zx') + rx' + sy' + tz'] \end{aligned} \tag{13}$$

satisfy equations (4).

When these values are substituted in (5), it is found that the T transform $N_1(x_1)$ lies on Q. It can be shown that any congruence conjugate to a net N can be obtained by drawing through points of N

---

[1] M_2, p. 170.

[2] The function $\theta' \neq 0$, since N' cannot lie on a cone.

lines whose direction-parameters are the coordinates of some net parallel to N. Hence we have the theorem of Ribaucour :

Any congruence conjugate to a net on a quadric meets the quadric again in a net to which it is conjugate.

Let $N'(x')$ and $N''(x'')$ be two nets parallel to a net N, and $N_1(x_1)$ and $N_2(x_2)$ the T transform of N determined by the pairs of corresponding functions θ_1, θ'_1 and θ_2, θ'_2, where θ_1 and θ_2 are two solutions of (1). In place of (4) we have

$$(14)\qquad \frac{\partial\theta'_1}{\partial u}=h_1\frac{\partial\theta_1}{\partial u},\quad \frac{\partial\theta'_1}{\partial v}=l_1\frac{\partial\theta_1}{\partial v};\qquad \frac{\partial\theta''_2}{\partial u}=h_2\frac{\partial\theta_2}{\partial u},\quad \frac{\partial\theta''_2}{\partial v}=l_2\frac{\partial\theta_2}{\partial v}.$$

In addition there are functions θ''_1 and θ'_2, determined to within additive constants by the quadratures

$$(15)\qquad \frac{\partial\theta''_1}{\partial u}=h_2\frac{\partial\theta_1}{\partial u},\quad \frac{\partial\theta''_1}{\partial v}=l_2\frac{\partial\theta_1}{\partial v};\qquad \frac{\partial\theta'_2}{\partial u}=h_1\frac{\partial\theta_2}{\partial u},\quad \frac{\partial\theta'_2}{\partial v}=l_1\frac{\partial\theta_2}{\partial v},$$

since θ_1 and θ_2 are solution of (1). We have shown [1] that a net N''_1 of coordinates x'''_1, y'''_1, z'''_1 is given by equations of the form

$$(16)\qquad x'''_1=x''-\frac{\theta''_1}{\theta'_1}x'$$

and that N''_1 is parallel to N_1; also that the functions

$$(17)\qquad \theta_{12}=\theta_2-\frac{\theta_1}{\theta'_1}\theta_2,\qquad \theta''_{12}=\theta'_2-\frac{\theta''_1}{\theta'_1}\theta'_2$$

are corresponding solutions of the point equations of N_1 and N''_1. Moreover, we have shown also that the functions x_{12}, y_{12}, z_{12}, of the form

$$(18)\qquad x_{12}=x_1-\frac{\theta_{12}}{\theta''_{12}}x'''_1$$

are the coordinates of a net N_{12} which is a T transform of N_1 and also N_2. Since θ'_1 and θ'_2 are determined only to within arbitrary additive constants, there are accordingly ∞^2 such nets N_{12}.

---

[1] M_1, p. 111.

We apply these results true for any net to the particular case when N is on the quadric Q, and also N_1 and N_2, that is where θ_1 and θ_2 are of the form (13). In order that θ'''_{12} and θ_{12} be of the form (12) and (13) with x', y', z'; x, y, z replaced by x'''_1, y'''_1, z'''_1; x_1, y_1, z_1 respectively, we must have

$$(19)\qquad \theta'_1 + \theta'_2 = 2[ex'x'' + fy'y'' + gz'z'' + a(x'y'' + x''y') - b(y'z'' + y''z') + c(z'x'' + z''x')].$$

By differentiation it is found that left-hand member of this equation is constant, and consequently the additive constants in θ''_1 and θ'_2 can be chosen in ∞^1 ways so that (19) shall hold. Hence :

If N_1 *and* N_2 *are* T *transforms of* N *and all three nets lie on* Q (9), *there are* ∞^1 *other nets* N_{12} *on* Q *which are* T *transforms of* N_1 *and* N_2; *they can be found by a quadrature.*

5. *Permanent nets on a quadric.* — Servant [1] has shown that if N is a permanent net on a quadric, Q, the parameters of N can be chosen, so that

$$(20)\qquad D + D'' = -\frac{1}{\sigma}$$

where D and D″ are the second fundamental coefficients of N, and $\sigma^4 = -K$; K being the total curvature of Q; also that the applicable net $\overline{N}$ is isothermal conjugate, and that its second fundamental coefficients, $\overline{D}$ and $\overline{D}''$, are such that

$$(21)\qquad \overline{D} + \overline{D}'' = 0.$$

Since N and $\overline{N}$ are applicable, we have

$$(22)\qquad \sigma^4 = \frac{DD''}{H^2} = \frac{\overline{D}\,\overline{D}''}{H^2}, \qquad H^2 = EG - F^2,$$

where the linear elements of Q and the applicable surface $\overline{S}$, referred

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol. XXX, 1902, p. 10.

to N and $\overline{N}$, is written

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,d\sigma^2. \tag{23}$$

If we define two functions a and b by means of the equations

$$D = -\sigma a^2, \qquad D'' = \sigma b^2, \tag{24}$$

we have from (20)

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{\sigma^2}. \tag{25}$$

In consequence of (21) and (22), we may take

$$-\overline{D} = \overline{D}'' = \sigma ab, \qquad a^2 b^2 = H^2 \sigma^2. \tag{26}$$

The Codazzi equations for N and $\overline{N}$ are [1]

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial D}{\partial v} = D\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - D''\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}, && \frac{\partial D''}{\partial u} = -\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} D + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} D''; \\ &\frac{\partial \overline{D}}{\partial v} = \overline{D}\left(\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right), && \frac{\partial \overline{D}}{\partial u} = \overline{D}\left(\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right), \end{aligned}\right. \tag{27}$$

the Christoffel symbols $\begin{Bmatrix}rs\\t\end{Bmatrix}$ being formed with respect to (23).

From these equations, in which D, D'' and $\overline{D}$ are replaced by their expressions from (24) and (26), and the identities [2] :

$$\frac{\partial \log H}{\partial u} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \qquad \frac{\partial \log H}{\partial v} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}, \tag{28}$$

we obtain, in consequence of (25),

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial} \log \frac{a}{\sigma}, && \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v} \log a, && \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{b^2}{a^2} \frac{\partial}{\partial u} \log b\sigma, \\ &\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial}{\partial v} \log a\sigma, && \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial u} \log b, && \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{b}{\sigma}. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

---

[1] *E.*, p. 155. — A reference of this sort is to the author's Differential Geometry.

[2] *E.*, p. 153.

If $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ denote the cartesian coordinates of $\bar{S}$, we have ([1])

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2} &= \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \bar{D}X,\\ \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u\,\partial v} &= \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v},\\ \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} &= \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \bar{D}'X, \end{aligned}\right.$$

and similar expressions in $\bar{y}$ and $\bar{z}$. In consequence of (21) and (29), we have that $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ are solutions of the equations

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} &= 2\frac{\partial \log a}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial u} + 2\frac{\partial \log b}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial v},\\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial \log a}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \log b}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

We have seen ([2]) that when the coordinates of a net satisfy equations (31), it is an R net that is the tangente to the curves of either family of the net form a W congruence. Hence :

The permanent net on a deform of a quadric is an R *net* ([3]).

For the central quadric Q

$$(32)\qquad ex^2 + fy^2 + gz^2 = 1$$

we have

$$(33)\qquad X, Y, Z = \frac{ex,\ fy,\ gz}{\sqrt{\Sigma e^2 x^2}},$$

and the gaussian curvature is given by ([4])

$$(34)\qquad K = -\frac{1}{c^4(\Sigma e^2 x^2)^2}, \qquad \frac{1}{\sigma} = c\sqrt{\Sigma e^2 x^2}.$$

where $c^4 = -\dfrac{1}{efg}$.

([1]) *E.*, p. 154.

([2]) *M*$_3$.

([3]) *Cf.* Tzitzeica, *Comptes rendus*, t. 152, 1911, p. 1077; also Bianchi, *Rendiconti dei Lincei*, 5e série, vol. XXII, 1913, p. 3.

([4]) *Cf.* C. Smith, *Solid Geometry*, 9th edition, p. 123.

If Q is referred to a net N whose point equation is (1), we have

$$(35)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\log\left[\Sigma e\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right]=\frac{\partial}{\partial v}\log a^2,\qquad \frac{\partial}{\partial u}\log\left[\Sigma e\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]=\frac{\partial}{\partial u}\log b^2,$$

and also

$$(36)\qquad \Sigma e\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=0.$$

Hence

$$(37)\qquad \Sigma e\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=a^2\mathrm{U},\qquad \Sigma e\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=b^2\mathrm{V},$$

where U and V are functions of u and v alone.

In consequence of (24), (29), and equations analogous to (30) we find

$$(38)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u}\left[\Sigma e\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right]=\dfrac{\partial}{\partial u}\log\dfrac{a^2}{\sigma^2}\cdot\Sigma e\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2-2\sigma a^2\Sigma e\mathrm{X}\dfrac{\partial x}{\partial u},\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\left[\Sigma e\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]=\dfrac{\partial}{\partial v}\log\dfrac{b^2}{\sigma^2}\cdot\Sigma e\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2-2\sigma b^2\Sigma e\mathrm{X}\dfrac{\partial x}{\partial v}.\end{cases}$$

From (33) we have

$$\Sigma e\mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\Sigma e^2x^2},\qquad \Sigma e\mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\Sigma e^2x^2}.$$

When the expressions (37) are substituted in (38), the result is reducible by means of (34) to

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial u}=\left(\mathrm{U}-\frac{1}{c}\right)\frac{\partial\log\sigma}{\partial u},\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial v}=\left(\mathrm{V}+\frac{1}{c}\right)\frac{\partial\log\sigma}{\partial v}.$$

Also on differentiating equations (36) with respect to u and v we get

$$(\mathrm{U}+\mathrm{V})\frac{\partial\log a}{\partial v}+\left(\mathrm{V}+\frac{1}{c}\right)\frac{\partial\log\sigma}{\partial v}=0,$$

$$(\mathrm{U}+\mathrm{V})\frac{\partial\log b}{\partial u}+\left(\mathrm{U}-\frac{1}{c}\right)\frac{\partial\log\sigma}{\partial u}=0.$$

From these two sets of equations it follows that $\mathrm{U}=-\mathrm{V}=\frac{1}{c}$, and

consequently

$$(39) \qquad \Sigma e\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \frac{a^2}{c}, \qquad \Sigma e\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = -\frac{b^2}{c}.$$

Hence from (25) and (34) we have the theorem :

For any permanent net on a central quadric (32) *the coordinates satisfy the condition*

$$(40) \qquad \Sigma e\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \Sigma e\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = c\Sigma e^2 x^2,$$

where $c^2 = -\frac{1}{efg}$.

This equation may be written

$$(41) \qquad a^2 - b^2 = c^2 \Sigma e^2 x^2.$$

For the paraboloid P

$$(42) \qquad ex^2 + fy^2 + 2z = 0$$

we have

$$(43) \qquad X, Y, Z = \frac{ex, fy, 1}{\sqrt{e^2x^2 + f^2y^2 + 1}},$$

and

$$(44) \qquad K = -\frac{1}{c^4(e^2x^2 + f^2y^2 + 1)^2}, \qquad \frac{1}{\sigma} = c\sqrt{e^2x^2 + f^2y^2 + 1},$$

where $c = -\frac{1}{4ef}$.

If P is referred to a net N whose point equation is (1), we have

$$e\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + f\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

and by processes analogous to those used in the case of (32) we find

$$(45) \qquad e\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + f\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \frac{a^2}{c}, \qquad e\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + f\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = -\frac{b^2}{c}.$$

Hence we have the theorem :

For any net on the paraboloid (42) *the coordinates satisfy*

$$(46)\qquad e\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+f\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+e\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+f\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2=c(e^2x^2+f^2y^2+1)$$

where $c=\frac{1}{4ef}$.

This equation may be written

$$(47)\qquad a^2-b^2=c^2(e^2x^2+f^2y^2+1).$$

Conversely, we can establish the theorem :

If the coordinates of a net on the central quadric (32) *satisfy* (40), *or on the paraboloid* (42) *satisfy* (46), *the net is permanent net.*

4. *Transformations* T *of permanent nets on a quadric.* — Let N be a permanent net on the quadric Q (32). From (12) and (13) it follows that if in the equations (5) we take

$$(48)\qquad \theta=2(exx'+fyy'+gzz')=2\Sigma exx',\qquad \theta'=\Sigma ex'^2,$$

the T transform N_1 of N lies on Q. In order that N_1 be a permanent net, it is necessary and sufficient that

$$(49)\qquad \Sigma e\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2+\Sigma e\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2=c^2\Sigma e^2x_1^2.$$

From (5) we have by differentiation

$$(50)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial u}=\frac{\tau}{\theta'^2}\left(x'\frac{\partial\theta}{\partial u}-\theta'\frac{\partial x}{\partial u}\right),\qquad \frac{\partial x_1}{\partial v}=\frac{\sigma}{\theta'^2}\left(x'\frac{\partial\theta}{\partial v}-\theta'\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

where

$$(51)\qquad \tau=h\theta-\theta',\qquad \sigma=l\theta-\theta'.$$

Substituting these expressions in (49), we can reduce the resulting equation by means of (39) to

$$(52)\qquad \tau^2a^2-\sigma^2b^2=c^2\theta'^2\Sigma e^2x_1^2.$$

In consequence of (3) we have from (51)

$$(53)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\tau}{\theta}\right) = \dfrac{\sigma-\tau}{\theta'}\dfrac{\partial}{\partial v}\log a - \dfrac{h\sigma}{\theta'^2}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\sigma}{\theta}\right) = \dfrac{\tau-\sigma}{\theta'}\dfrac{\partial}{\partial u}\log b - \dfrac{l\tau}{\theta'^2}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}. \end{cases}$$

Differentiating (52) and making use of (53), the resulting equations are reducible to

$$\frac{\partial\varrho}{\partial u} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\left[-\frac{b^2}{\theta'^2}l\theta(\tau-\sigma) + c^2\Sigma e^2 x_1(x_1-x) + c^2\frac{\tau}{\theta'}\Sigma e^2 x(x_1-x)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial v} + \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\left[\frac{a^2}{\theta'^2}h\theta(\sigma-\tau) + c^2\Sigma e^2 x_1(x_1-x) + c^2\frac{\sigma}{\theta'}\Sigma e^2 x(x_1-x)\right] = 0,$$

where

$$(54)\qquad \varrho = \frac{a^2\tau - b^2\sigma}{\theta'} + c^2\Sigma e^2 x x_1.$$

By means of (5), (41), (51), (52) and (54) these equations can be given the form

$$(55)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial u} + \frac{\varrho}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\left(\frac{h\theta}{\theta'} - 2\right) = 0, \qquad \frac{\partial\varrho}{\partial v} + \frac{\varrho}{\theta}\frac{\partial\varrho}{\partial v}\left(\frac{l\theta}{\theta'} - 2\right) = 0$$

which can be integrated in the form

$$(56)\qquad \varrho\theta' = -\frac{kc^2}{2}\theta^2,$$

where k is any constant. When this value for ϱ is substituted in (54), this equation and (52) are equivalent, in consequence of (5) and (51), to

$$(57)\qquad \begin{cases} h^2a^2 - l^2b^2 = c^2\Sigma(e^2-ke)x'^2, \\ l\,h\,a^2 - l\,b^2 = c^2\Sigma(e^2-ke)xx'. \end{cases}$$

Differentiating the second of these equations, we obtain

$$(58)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial u} + \dfrac{\partial\log a}{\partial u}h - \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{\partial\log b}{\partial u}l - \dfrac{c^2}{a^2}\Sigma(e^2-ke)x'\dfrac{\partial x}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial v} + \dfrac{\partial\log b}{\partial v}l - \dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{\partial\log a}{\partial v}h + \dfrac{c^2}{b^2}\Sigma(e^2-ke)x'\dfrac{\partial x}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

in consequence of (2).

It is readily found that equations (2), (3) and (58) form a completely integrable system, in consequence of (41). Moreover, for every set of solutions of this system equations (57) are satisfied to within additive constants, as is found by differentiation. Hence each set of solutions satisfying (57) determines a T transform which is a permamanent net. From (2), (3) and (5) it is seen that if x', y', z', h and l are multiplied by the same constant, the transform N_1 is unaltered. Hence when k is any constant different from e, f and g, there are ∞^2 sets of solutions satisfying (57) and giving distinct transforms.

When $k = e$, there are ∞^1 sets of solution y', z', h and l of (2), (3) and (58) satisfying (57). Then x' is given by the quadratures (2) and involves an additive constant, say m. In this case each set of solution y', z', h and l determines ∞^1 transformations, such that the corresponding points of the ∞^1 transforms lie on a conic, the section of quadric by a plane parallel to the lines from the origin to the points $(x + m, y, z)$ as m varies. Similar results hold when $k = f$ or $k = g$. Hence :

A permanent net on a central quadric $ex^2 + fy^2 + gz^2 = 1$ admits ∞^2 transformations T_k into permanent nets on the quadric for each value of the constant k; when k is equal to e, f or g, the transforms N_1 may be grouped into ∞^1 families of ∞^2 transforms each such that corresponding points of the nets of a family lie on a conic.

When N is a permanent net on the paraboloid P (42), we have as the equations analogous to (48), (52) and (55) the following :

$$\theta = 2(exx' + fyy' + z'), \qquad \theta' = ex'^2 + fy'^2, \tag{59}$$

$$\tau^2 a^2 - \sigma^2 b^2 = c^2 \theta'^2 (e^2 x_1^2 + f^2 y_1^2 + 1), \tag{60}$$

$$\varphi = \frac{\tau}{\theta'} a^2 - \frac{\sigma}{\theta'} b^2 + c^2 (e^2 x x_1 + f^2 y y_1 + 1); \tag{61}$$

and (55) also. Now (60) and (61) are equivalent to

$$\left\{ \begin{aligned} h^2 a^2 - l^2 b^2 &= c^2 [(e^2 - ke) x'^2 + (f^2 - kf) y'^2], \\ h\ a^2 - l\ b^2 &= c^2 [(e^2 - ke) x x' + (f^2 - kf) y y' - k z']. \end{aligned} \right. \tag{62}$$

In this case we have the completely integrable system consisting

of (2), (3) and

$$(63)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial u} + \dfrac{\partial \log a}{\partial u} h - \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{\partial \log b}{\partial u} l - \dfrac{c^2}{a^2}\left[(e^2 - ke)x'\dfrac{\partial x}{\partial u} + (f^2 - kf)y'\dfrac{\partial y}{\partial u}\right] = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial v} + \dfrac{\partial \log b}{\partial v} l - \dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{\partial \log a}{\partial v} h + \dfrac{c^2}{a^2}\left[(e^2 - ke)x'\dfrac{\partial x}{\partial v} + (f^2 - kf)y'\dfrac{\partial y}{\partial v}\right] = 0. \end{cases}$$

From these results follows the theorem :

A permanent net on a paraboloid $ex^2 + fy^2 + 2z = 0$ admits ∞^2 transformations T_k into permanent nets on the paraboloid for each value of the constant k; when k is equal to e or f, the transforms N_1 may be grouped into ∞^1 families of ∞^1 transforms such that corresponding points of the nets of a family lie on a conic.

3. *Transformations* T *of surfaces applicable to a quadric.* — It is our purpose to show that each transformation T_k of a permanent net N on a quadric Q into a permanent net N_1 on Q leads directly to a transformation T_k of the net $\overline{N}$ applicable to N into the net $\overline{N}_1$ applicable to N_1. In fact, we shall show that it is possible to find without quadratures a net $\overline{N}'$ parallel to $\overline{N}$ such that θ' given by (48) can be put in the form (9), and then the desired transform defined by (8).

Equating these expressions for θ', we have

$$(64)\qquad (e-k)x'^2 + (f-k)y'^2 + (g-k)z'^2 + k\Sigma\overline{x}'^2 = 0.$$

Differentiating this expression and assuming that equations of the form (7) hold, we obtain

$$(65)\quad \begin{cases} (e-k)x'\dfrac{\partial x}{\partial u} + (f-k)y'\dfrac{\partial y}{\partial u} + (g-k)z'\dfrac{\partial z}{\partial u} + k\Sigma\overline{x}'\dfrac{\partial \overline{x}}{\partial u} = 0, \\ (e-k)x'\dfrac{\partial x}{\partial v} + (f-k)y'\dfrac{\partial y}{\partial v} + (g-k)z'\dfrac{\partial z}{\partial v} + k\Sigma\overline{x}'\dfrac{\partial \overline{x}}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

If these equations are differentiated with respect to u and v and in the reduction use is made of (30) and analogous equations for N_1, two of the resulting equations are satisfied identically in consequence

of (65) and the other two are reducible to

$$h\Sigma e\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \mathrm{D}\,\Sigma(e-k)x'\mathrm{X} + k\overline{\mathrm{D}}\,\Sigma\overline{x}'\overline{\mathrm{X}} = 0,$$

$$l\,\Sigma e\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \mathrm{D}''\Sigma(e-k)x'\mathrm{X} + k\overline{\mathrm{D}}''\Sigma\overline{x}'\overline{\mathrm{X}} = 0.$$

In consequence of (24), (26), (33), (39) and the second of (57) these two equations are equivalent to

$$(h-l)\sigma ab + ke\Sigma\overline{x}'\overline{\mathrm{X}} = 0. \tag{66}$$

Solving equations (65) and (66) for $\overline{x}'$, $\overline{y}'$, $\overline{z}'$, we have expressions of the form

$$k\overline{x}' = \frac{\sigma ab}{c}(l-h)\overline{\mathrm{X}} + \frac{1}{\mathrm{H}^2}\left[\frac{\partial\overline{x}}{\partial u}\Sigma(e-k)x'\left(\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial v} - \mathrm{G}\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \frac{\partial\overline{x}}{\partial v}\Sigma(e-k)x'\left(\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{E}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right]. \tag{67}$$

If we differentiate these expressions, we find that $\overline{x}'$, $\overline{y}'$, $\overline{z}'$ satisfy equations (7), by making use of equations of §§ **3**, **4** and of § **65**, *E.*, p. 152. Also from (67) we have

$$\begin{aligned} k^2\Sigma\overline{x}'^2 &= \frac{\sigma^2a^2b^2}{c^2}(l-h)^2 \\ &\quad + \frac{1}{\mathrm{H}^2}\left\{\left[\Sigma(e-k)x'\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2\mathrm{E} + \left[\Sigma(e-k)x'\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2\mathrm{G}\right. \\ &\qquad \left. - 2\mathrm{F}\left[\Sigma(e-k)x'\frac{\partial x}{\partial u}\right]\left[\Sigma(e-k)x'\frac{\partial x}{\partial v}\right]\right\} \\ &= \frac{\sigma^2a^2b^2}{c^2}(l-h)^2 + \Sigma(e-k)^2x'^2 - [\Sigma(e-k)x'\mathrm{X}]^2. \end{aligned} \tag{68}$$

Substituting this expression in (64), we find that it is satisfied in virtue of the first of (57).

From these results and the first theorem of § **4** follows Theorem I of the introduction when k is not equal to 0, e, f or g.

When $k = e$, the function x' is determined only to within an additive constant m, as seen in § **4**. There are only ∞^1 sets of solutions y', z', h and l, and consequently from (67) it follows that there are only ∞^1 congruences G of the ∞^2 transformations. As m varies we

obtain ∞^1 transforms N_1 conjugate to the same congruence. They are defined by (8) where

$$\theta = 2\Sigma exx' + 2emx, \qquad \theta' = e(x'+m)^2 + fy'^2 + gz'^2.$$

From this expression for θ and the results of § 1 it follows that the tangent planes at corresponding points of these nets N_1 envelope a cone. If ξ_0, η_0, ζ_0 are the coordinates of the vertex, the equation of the tangent plane is

$$(\xi - \xi_0)X_1 + (\eta - \eta_0)Y_1 + (\zeta - \zeta_0)Z_1 = 0,$$

where ξ, η and ζ are current coordinates, and X_1, Y_1 and Z_1 are direction-parameters of the normal to N_1. When their expressions are calculated it is found that they involve m to the second degree, and consequently the cone is quadric.

When $k = e$, x' does not appear in (64) and (65). Solving the latter for y' and z', and substituting in (64), we obtain a homogeneous quadric equation in $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, $\bar{z}'$. Hence the lines of the congruences G through a point of N form a quadric cone. Since similar results hold when k is equal to f or g, we have in consequence of the first theorem of § 4, Theorem II of the introduction.

When Q is the quadric of revolution $e(x^2+y^2)+gz^2=1$, the transformations of Theorem I hold, as in the case of the general quadric. There is only one set of transformations of the type described in Theorem II; they are T_g. The transformations T_e possess the following properties [1].

Let $\bar{N}$ be a net applicable to a net N on a central quadric of revolution Q; the lines joining points of N to the foci of Q on the axis of revolution become lines of two normal congruences G_1 and G_2 conjugate to $\bar{N}$, when N is applied to $\bar{N}$; there can be found by two quadratures ∞^2 nets $\bar{N}_1$ conjugate to G_1 and ∞^2 nets $\bar{N}_2$ conjugate to G_2 which are applicable to ∞^2 nets N_1 and ∞^2 nets N_2 respectively on Q; the nets $\bar{N}_1$, or $\bar{N}_2$, can be grouped into ∞^1

[1] M_3, p. 337.

families of ∞^1 nets each such that their tangent planes at points on the same line of G_1, or G_2, envelop a quadric cone and the corresponding points of the applicable nets N_1, or N_2, on Q lie on a conic.

When the quadric is a sphere, real or imaginary, with the equation $a(x^2+y^2+z^2)=1$, there are no transformations of the type of Theorem II, but Theorem I holds. The nets $\overline{N}$ and $\overline{N}_1$ consist of the lines of curvature of surfaces of constant total curvature, and $\overline{N}$ and $\overline{N}_1$ are on the sheets of the enveloppe of a two parameter family of spheres (¹).

When the quadric is a paraboloid with the equation (42), we have from (9) and (59) in place of (64) the equation

$$(e-k)x'^2+(f-k)y'^2-kz'^2+k\Sigma x'^2=0. \tag{69}$$

Proceeding as in the case of (64), we find equations obtained from (65), (67) and (68) by putting $g=0$. Hence we find that Theorem I holds for deforms of P, and that there are only two sets of transformations of the type of Theorem II, namely F_e and F_f.

When $e=f$, that is when P is a paraboloid of revolution, the transformations T_e possess the following properties (²).

If $\overline{N}$ is a net applicable to a net N on a paraboloid of revolution P, the lines from points of N to the focus of P on its axis and the normals to the tangent plane to P at its vertex become lines of two normal congruences, G_1 and G_2, conjugate $\overline{N}$ when N is applied to $\overline{N}$; there can be found by two quadratures ∞^2 nets $\overline{N}_1$ conjugate to G_1, and ∞^2 nets $\overline{N}_2$ conjugate to G_2 which are applicable to ∞^2 nets N_1 and ∞^2 nets N_2 respectively on P; the nets $\overline{N}_1$, or $\overline{N}_2$, can be grouped into ∞^1 families of ∞^1 nets each such that their tangent planes at points on the same line of G_1, or G_2, envelop a quadric cone and the corresponding points of N_1, or N_2, on P lie on a conic.

(¹) M_3, p. 337.
(²) M_3, p. 338.

6. W *transforms of surfaces applicable to a central quadric.* — Let $\overline{N}(\overline{x})$ be a net applicable to a net $N(x)$ on the central quadric (32). We consider a T_k transformation of $\overline{N}(\overline{x})$ and $N(x)$ as treated in § 5. We have

$$\theta = 2\Sigma exx'. \tag{70}$$

From (33) and (34) we have

$$\Sigma cx'X = c\sigma\Sigma e^2 xx'. \tag{71}$$

By differentiation of (70) we have

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = 2\Sigma ex'\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = 2\Sigma ex'\frac{\partial x}{\partial v}, \tag{72}$$

and with the aid of (30), (39) and (57) we find

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial v} - ck\sigma^2a^2\theta + \frac{2\sigma^2a^2b^2}{c}(l-h), \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial v} + ck\sigma^2b^2\theta + \frac{2\sigma^2a^2b^2}{c}(h-l). \end{aligned}\right. \tag{73}$$

Because of (25) and (29) we have

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 2\frac{\partial\log a}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial u} + 2\frac{\partial\log b}{dv}\frac{\partial\theta}{\partial v} - ck\theta. \tag{74}$$

From the results of a previous paper [1] it follows that if we take two transformations of $\overline{N}(\overline{x})$ of this type and write

$$\theta_1 = 2\Sigma exx', \qquad \theta_2 = 2\Sigma exx'' \tag{75}$$

the net $\overline{N}(\overline{\xi})$ defined by equations of the form

$$\overline{\xi} = \overline{x} + p\frac{\partial\overline{x}}{\partial u} + q\frac{\partial\overline{x}}{\partial v}, \tag{76}$$

where

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{1}{\Delta}\left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial v} - \theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right), \qquad q = \frac{1}{\Delta}\left(\theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial u} - \theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial u}\right). \\ \Delta &= \frac{\partial\theta_2}{\partial u}\frac{\partial\theta_1}{\partial v} - \frac{\partial\theta_2}{\partial v}\frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \end{aligned}\right. \tag{77}$$

---

[1] M_4.

is a W transform of $\overline{N}(\overline{x})$, that is these two nets are on the focal surfaces of a congruence. It is our purpose to show that $\overline{N}(\overline{\xi})$ is applicable to a net on Q.

On substituting the expressions for the derivatives of θ_1 and θ_2 analogous to (72) and (73) in the derivatives of $\overline{\xi}$ we reduce the resulting expressions to

$$(78)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\overline{\xi}}{\partial u} = p\left\{\overline{D}\,\overline{X} + \dfrac{2\sigma^2 a^2}{c\Delta}\left[\left(\dfrac{\partial\overline{x}}{\partial u}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} - \dfrac{\partial\overline{x}}{\partial v}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial u}\right)\left(b^2(l_1 - h_1) - c^2 k\dfrac{\theta_1}{2}\right)\right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left. - \left(\dfrac{\partial\overline{x}}{\partial u}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} - \dfrac{\partial\overline{x}}{\partial v}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)\left(b^2(l_2 - h_2) - c^2 k\dfrac{\theta_2}{2}\right)\right]\right\}, \\ \dfrac{\partial\overline{\xi}}{\partial v} = q\left\{\overline{D}''\,\overline{X} - \dfrac{2\sigma^2\beta^2}{c\Delta}\left[\left(\dfrac{\partial\overline{x}}{\partial u}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial v} - \dfrac{\partial\overline{x}}{\partial v}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial u}\right)\left(a^2(l_1 - h_1) - c^2 k\dfrac{\theta_1}{2}\right)\right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left. - \left(\dfrac{\partial\overline{x}}{\partial u}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v} - \dfrac{\partial\overline{x}}{\partial v}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)\left(a^2(l_2 - h_2) - c^2 k\dfrac{\theta_2}{2}\right)\right]\right\}. \end{cases}$$

By means of the same functions θ_1 and θ_2 we obtain a derived net $N(\xi)$ of $N(x)$. Its equations are of the form

$$(79)\qquad \xi = x + p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial x}{\partial v},$$

where p and q are given by (77). On substituting the expressions for θ_1 and θ_2, as given by (75) in the expression (77) for Δ, we find, in consequence of (33) and (*cf.* 26)

$$(80)\qquad \Pi\sigma = ab$$

that

$$(81)\quad \Delta = 4\Sigma ef(x''y' - x'y'')\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 4\Pi\Sigma ef(x''y' - x'y'')Z$$
$$= 4cabefg\Sigma x(y''z' - y'z'').$$

Hence the expression for ξ is reducible to

$$(82)\qquad \xi = \frac{y'z'' - y''z'}{e\Sigma x(y'z'' - y''z')}.$$

From this we have

$$(83)\qquad \Sigma e\xi x = 1.$$

The equations analogous to (57) are

$$(84)\quad \begin{cases} h_1^2 a^2 - l_1^2 b^2 = c^2 \Sigma (e^2 - ke) x'^2, & h_2^2 a^2 - l_2^2 b^2 = c^2 \Sigma (e^2 - ke) x''^2, \\ h_1 a^2 - l_1 b^2 = c^2 \Sigma (e^2 - ke) x x', & h_2 a^2 - l^2 b^2 = c^2 \Sigma (e^2 - ke) x x''. \end{cases}$$

By differentiation it can be shown that the left-hand member of the following equation is constant for any two transformations T_k:

$$(85)\qquad h_1 h_2 a^2 - l_1 l_2 b^2 - c^2 \Sigma (e^2 - ke) x' x'' = 0.$$

We choose the nets N' and N'' so that (85) is satisfied. By means of these relations we show that

$$(86)\qquad \begin{aligned} &\Sigma (f^2 - kf)(g^2 - kg)(y' z'' - y'' z') \\ &= \Sigma (e^2 - ke) x'^2 \Sigma (e^2 - ke) x''^2 - (\Sigma (e^2 - ke) x' x'')^2 \\ &= - \frac{a^2 b^2}{c^4} (l_1 h_2 - l_2 h_1)^2; \end{aligned}$$

also that

$$(87)\quad (e^2 - ke)(f^2 - kf)(g^2 - kg) [\Sigma x (y' z'' - y'' z')]^2 = \frac{k a^2 b^2}{c^4} (l_1 h_2 - l_2 k_1)^2.$$

In consequence of these identities we have

$$(88)\qquad \Sigma \frac{\xi^2}{\frac{1}{e} - \frac{1}{k}} = 1,$$

that is $N(\xi)$ lies on a quadric Q_k confocal with Q.

The equations for $N(\xi)$ analogous to (78) are obtained from (78) by removing the bars form $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{D}$, $\bar{D}''$ and $\bar{X}$. Substituting from (75) the expressions for the derivatives of θ_1 and θ_2 and making use of (24), (33), (34) and (80), we reduce the resulting equations to the form

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\sigma^2 a^2 p}{\Delta} \Big\{ c \Delta e x + 4 abfg \Big[(z y'' - z'' y) \Big(b^2 (l_1 - h_1) - c^2 k \frac{\theta_1}{2} \Big) - (z y' - z' y) \Big(b^2 (l_2 - h_2) - c^2 k \frac{\theta_2}{2} \Big) \Big] \Big\},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\sigma^2 b^2 q}{\Delta} \Big\{ c \Delta e x - 4 abfg \Big[(z y'' - z'' y) \Big(a^2 (l_1 - h_1) - c^2 k \frac{\theta_1}{2} \Big) - (z y' - z' y) \Big(a^2 (l_2 - h_2) - c^2 k \frac{\theta_2}{2} \Big) \Big] \Big\}.$$

By means of (75) and (81) these are reducible to

$$(89)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial u} = \dfrac{4\sigma^2 a^3 bpfg}{\Delta}\{c^2(e^2-ke)x\Sigma x(y'z''-y''z') + c^2k(y'z''-y''z') \\ \qquad\qquad + b^2[(zy''-z''y)(l_1-h_1)-(zy'-z'y)(l_2-h_2)]\}, \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial v} = -\dfrac{4\sigma^2 ab^3 qfg}{\Delta}\{c^2(e^2-ke)x\Sigma x(y'z''-y''z') + c^2k(y'z''-y''z') \\ \qquad\qquad + a^2[(zy''-z''y)(l_1-h_1)-(zy'-z'y)(l_2-h_2)]\}. \end{cases}$$

From (84) we have

$$\begin{aligned} &(zy''-z''y)(h_1a^2-l_1b^2)-(zy'-z'y)(h_2a^2-l_2b^2) \\ &\quad = c^2\{(e^2-ke)x\Sigma x(y'z''-y''z') + (z'y''-z''y')\Sigma(e^2-ke)x^2\} \\ &\quad = c^2\left\{(e^2-ke)x\Sigma x(y'z''-y''z') + (z'y''-z''y')\left(\frac{1}{e^2\sigma^2}-1\right)\right\}. \end{aligned}$$

Adding the left-hand member of this expression to the expressions in parentheses in (89) and subtracting the right-hand member, we get in consequence of (25)

$$(90)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial u} = \dfrac{4a^3bpfg}{\Delta}[h_1(zy''-z''y)-h_2(zy'-z'y)+(z''y'-z'y'')], \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial v} = -\dfrac{4ab^3qfg}{\Delta}[l_1(zy''-z''y)-l_2(zy'-z'y)+(z''y'-z'y'')]. \end{cases}$$

For $N(\xi)$ the expressions analogous to $\Sigma e\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2$ and $\Sigma e\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2$ for N are $\sum \dfrac{ke}{k-e}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2$ and $\sum \dfrac{ke}{k-e}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2$. Making use of well-known theorems on determinants, we find ultimately that

$$(91)\quad \begin{cases} \sum \dfrac{ke}{k-e}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 = -ka^2p^2, \qquad \sum \dfrac{ke}{k-e}\dfrac{\partial\xi}{\partial u}\dfrac{\partial\xi}{\partial v} = 0, \\ \qquad\qquad \sum \dfrac{ke}{k-e}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2 = kb^2q^2. \end{cases}$$

For $\overline{N}(\overline{x})$ we have $\overline{D} = -\overline{D}'' = -\sigma ab$ (*cf.* 26). Hence from (75) and the analogous equations for $N(\xi)$ we have

$$(91)\quad \begin{cases} \sum\left(\dfrac{\partial\overline{\xi}}{\partial u}\right)^2 - \sum\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 = p^2(\overline{D}^2-D^2) = -a^2p^2, \\ \sum\dfrac{\partial\overline{\xi}}{\partial u}\dfrac{\partial\overline{\xi}}{\partial v} - \sum\dfrac{\partial\xi}{\partial u}\dfrac{\partial\xi}{\partial v} = 0, \\ \sum\left(\dfrac{\partial\overline{\xi}}{\partial v}\right)^2 - \sum\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2 = q^2(\overline{D}''^2-\overline{D}''^2) = b^2q^2. \end{cases}$$

From (91) and (92) we have

$$\sum\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial u}\right)^2=\sum\frac{k}{k-e}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2,\qquad \sum\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial v}\right)^2=\sum\frac{k}{k-e}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2;$$

$$\sum\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial u}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial v}=\sum\frac{k}{k-e}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}.$$

Hence if we put

$$(93)\qquad \hat{x}=\sqrt{\frac{k}{k-e}}\,\xi,\qquad \hat{y}=\sqrt{\frac{k}{k-f}}\,\eta,\qquad \hat{z}=\sqrt{\frac{k}{k+g}}\,\zeta,$$

the net $\overline{N}(\bar{\xi})$ is applicable to the net $N(\hat{x})$, which in consequence of (88) lies on Q. The equations (93) define the *relation of Ivory* between a quadric and a confocal quadric; the point of coordinates $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ is the intersection with Q of the orthogonal trajectory of the family of confocal quadrics which passes through point of coordinates ξ, η, ζ of Q_k (¹).

The functions of a transformation W are x', y', z', x'', y'', z'', h_1, l_1, h_2 and l_2. They satisfy a completely integrable system of the form (2), (3) and (58). Moreover, the five conditions (84) and (85) must be satisfied. However, these equations are satisfied also by the functions

$$(94)\qquad \begin{cases} \alpha x'+\beta x'', & \alpha y'+\beta y'', & \alpha z'+\beta z'', & \alpha h_1+\beta h_2, & \alpha l_1+\beta l_2,\\ \gamma x'+\delta x'', & \gamma y'+\delta y'', & \gamma z'+\delta z'', & \gamma h_1+\delta h_2, & \gamma l_1+\delta l_2,\end{cases}$$

where α, β, γ and δ are constants. In this case, as follows froms (76), (77) and (79) we get the same nets $\overline{N}(\bar{\xi})$ and $N(\xi)$. Consequently for each value of k there are ∞^1 transformations of the kind sought.

If $N_1(x_1)$ and $N_2(x_2)$ denote the T transforms of N, we have

$$x_1=x-\frac{\theta_1}{\theta_1'}x',\qquad x_2=x-\frac{\theta_2}{\theta_2'}x''.$$

In consequence of (82) and (83) we have

$$\Sigma e\xi x_1=1,\qquad \Sigma e\xi x_2=1.$$

Hence the point of coordinates, ξ, η, ζ, is the pole of the plane of the corresponding points on N, N_1 and N_2.

(¹) *Ib.*, p. 59.

We may state the foregoing results as follows.

If N *is a permanent net on a central quadric* Q, *there are* ∞^1 *sets of transformations* T_k *of* N *into nets* N_1 *and* N_2 *so that the condition* (85) *is satisfied; the locus of the pole* M_k *of the plane* MM_1M_2 *with respect to* Q *is a net* N_k *on a quadric confocal to* Q; *as* N *rolls on its applicable net* $\overline{N}$, *the point* M_k *describes a net* $\overline{N}_k$, *such that* $\overline{N}$ *and* $\overline{N}_k$ *are on the focal surfaces of a* $\overline{W}$ *congruence, and* $\overline{N}_k$ *is applicable to the net on* Q *which is the Ivory transform of the net* $\overline{N}_k$.

These transformations are equivalent to those found by Bianchi by entirely different processes (¹).

7. W *Transforms of surfaces applicable to a paraboloid.* — In this section we establish for surfaces applicable to the paraboloid $ex^2+fy^2+2z=0$ transformations analogous to those found in the preceding section. Equations (73) and (74) hold in this case also. In place of (75) we have

$$\theta_1 = z(exx'+fyy'-z'), \qquad \theta_2 = z(exx''+fyy''+fyy''+z'').$$

In place of (81) and (82) we have

$$\Delta = 4cabef(x''y'-x'y''),$$

and

$$\xi = \frac{1}{e}\,\frac{y''z'-y'z''}{x''y'-x'y''}, \qquad \eta = \frac{1}{f}\,\frac{z''x'-z'x''}{x''y'-x'y''},$$

$$\zeta = -z + \frac{y(x''z'-x'z'')+x(y'z''-y''z')}{x''y'-x'y''}.$$

Now

$$exx+fy\eta+\zeta+z=0.$$

The first two of equations (84) with $g=0$ hold and in place of the second we have

$$(95)\qquad \begin{cases} h_1a^2-l_1b^2=c^2[(e^2-ke)xx'+(f^2-kf)yy'-kz'], \\ h_2a^2-l_2b^2=c^2[(e^2-ke)xx''+(f^2-kf)yy''-kz''], \end{cases}$$

and (85) holds with $g=0$.

(¹) *B.*

By making use of the expressions for

$$x(y'z''-y''z') \qquad \text{and} \qquad y(z'x''-z''x')$$

which are obtainable from (95), we find that ξ, η and ζ satisfy the condition

$$\frac{\xi^2}{\frac{1}{e}-\frac{1}{k}}+\frac{\eta^2}{\frac{1}{f}-\frac{1}{k}}+2\zeta+\frac{1}{k}=0,$$

that is the net N (ξ) lies on a quadric confocal with P.

In place of (89) we have

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}=p\frac{\sigma^2a^2}{\Delta}\{\Delta c(e-k)x+4abf$$
$$\times[b^2y''(l_1-h_1)-b^2y'(l_2-h_2)+c^2k(y'z''-y''z')]\},$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial v}=-q\frac{\sigma^2b^2}{\Delta}\{\Delta c(e-k)x+4abf$$
$$\times[a^2y''(l_1-h_1)-a^2y'(l_2-h_2)+c^2k(y'z''-y''z')]\}.$$

From (95) we have

$$y''(h_1a^2-l_1b^2)-y'(h_2a^2-l_2b^2)$$
$$=c^2[(e^2-ke)x(x'y''-y'x'')-k(y'z''-y''z')].$$

With the aid of this identity the above equations are reducible to

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}=\frac{4pa^3bf}{\Delta}(y''h_1-y'h_2),\qquad \frac{\partial\xi}{\partial v}=-\frac{4qab^3f}{\Delta}(y''l_1-y'l_2).$$

From these and analogous equations we obtain

$$\frac{ek}{k-e}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+\frac{fk}{k-e}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2=-ka^2p^2,$$
$$\frac{ek}{k-e}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2+\frac{fk}{k-e}\left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)^2=kb^2q^2,$$
$$\frac{ek}{k-e}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}+\frac{fk}{k-e}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=0.$$

From these equations and (92) we have

$$\sum\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial u}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\qquad \sum\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial u}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial v}=\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$
$$\sum\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial v}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \text{ (1)}.$$

(1) Here the symbol Σ refers to the three variables.

where

$$x = \sqrt{\frac{k}{k-e}}\,\xi, \qquad \hat{y} = \sqrt{\frac{k}{k-f}}\,\eta, \qquad z = \zeta + \frac{1}{2k}.$$

These are the equations of the transformation of Ivory for P.

The other observations for transformations of a central quadric hold also for the case of the paraboloids, and consequently we have the analogous theorem :

If N *is a permanent net on a paraboloid* P, *there are* ∞^1 *pairs of transformations* T_k *of* N *into nets* N_1 *and* N_2 *so that the condition*

$$h_1 h_2 a^2 - l_1 l_2 b^2 = c^2[(c^2 - ke)x'x'' + (f^2 - kf)y'y'']$$

holds; the locus of the pole M_k *of the plane* MM_1M_2 *with respect to* P *is a net* N_k *on a paraboloid confocal to* P; *as* N *rolls on its applicable net* $\overline{N}$ *the point* M_k *describes a net* $\overline{N_k}$ *such that* $\overline{N}$ *and* $\overline{N_k}$ *are the focal nets of a* W *congruence, and* $\overline{N_k}$ *is applicable to the net on* P *which is the Ivory transform of the net* N_k.

These transformations are equivalent to Bianchi's transformation B_k of surfaces applicable to a paraboloid ([1]).

8. *Permutability to transformations* T_k *and* B_k. — Let $\overline{N}(\bar{x})$ be the permanent net on a deform of the quadric Q(32) and $N(\xi)$ its B_k transform by means of functions x', y', z'; x'', y'', z''; h_1, l_1, h_2, l_2. Let x''', y''', z''', h_3, l_3, be another set of solutions satisfying the conditions

$$(96) \qquad h_3^2 a^2 - l_3^2 b^2 = c^2 \Sigma (e^2 - k'e) x'''^2, \qquad h_3 a^2 - l_3 b^2 = c^2 \Sigma (e^2 - k'e) x x''',$$

so that the $T_{k'}$ transform N_3 of N defined by equations of the form

$$x_3 = x - \frac{\theta_3}{\theta_3'} x'''$$

where

$$\theta_3 = 2\Sigma e x x''', \qquad \theta_3' = \Sigma e x'''^2$$

is on Q.

([1]) *Loc. cit.*

From the results ([1]) of general transformations T.

It follows that the equations of the forms

$$(97)\qquad (x_3)' = x' - \frac{\theta'_3}{\theta'''_3} x''', \qquad (x_3)'' = x'' - \frac{\theta''_3}{\theta'''_3} x'''$$

define nets parallel to N_3 applicable to $\overline{N}_3$; the corresponding functions h_{31}, l_{31} and h_{32}, l_{32} are given by

$$h_{31} = \frac{h_3\theta'_3 - h_1\theta'''_3}{h_3\theta_3 - \theta'''_3}, \qquad l_{31} = \frac{l_3\theta'_3 - l_1\theta'''_3}{l_3\theta_3 - \theta'''_3},$$
$$h_{32} = \frac{h_3\theta''_3 - h_2\theta'''_3}{h_3\theta_3 - \theta'''_3}, \qquad l_{32} = \frac{l_3\theta''_3 - l_2\theta'''_3}{l_3\theta_3 - \theta'''_3}.$$

The functions a_3 and b_3 appearing in the point equation of N_3 are of the form

$$a_3 = a\left(h_3\frac{\theta_3}{\theta'''_3} - 1\right), \qquad b_3 = b\left(l_3\frac{\theta_3}{\theta'''_3} - 1\right).$$

In order that these functions may satisfy equations analogous to (84) and (85), namely

$$\begin{aligned}
a_3^2 h_{31}^2 - b_3^2 l_{31}^2 &= c^2\Sigma(e^2 - ke)(x_3)'^2,\\
a_3^2 h_{32}^2 - b_3^2 l_{32}^2 &= c^2\Sigma(e^2 - ke)(x_3)''^2,\\
a_3^2 h_{31} - b_3^2 l_{31} &= c^2\Sigma(e^2 - ke)x_3(x_3)',\\
a_3^2 h_{32} - b_3^2 l_{32} &= c^2\Sigma(e^2 - ke)x_3(x_3)'',\\
a_3^2 h_{31}h_{32} - b_3^2 l_{31}l_{32} &= c^2\Sigma(e^2 - ke)(x_3)'(x_3)'',
\end{aligned}$$

it is necessary and sufficient that

$$(98)\qquad \begin{cases} a^2 h_1 h_3 - b^2 l_1 l_3 = c^2\Sigma(e^2 - ke)x'x''' + \dfrac{c^2}{2}(k - k')\theta'_3,\\[2ex] a^2 h_2 h_3 - b^2 l_2 l_3 = c^2\Sigma(e^2 - ke)x''x''' + \dfrac{c^2}{2}(k - k')\theta''_3. \end{cases}$$

Differentiating these equations with respect to u and v, and making use of (58), and analogous equations, we find that the resulting equations are satisfied identically. There are two cases to be considered, according as k and k' are equal or not.

If $k' \neq k$, the functions θ'_3 and θ''_3 are uniquely determined by (98),

([1]) M_1, p. 111.

and consequently $(x_3)'$ and $(x_3)''$ are uniquely determined by (97). Then by means of the functions

$$\theta_{31} = 2\Sigma e x_1 (x_3)', \qquad \theta_{32} = 2\Sigma e x_1 (x_3)'' \tag{99}$$

we obtain a B_k transform $\overset{\backprime}{N}_3$ of $\overline{N}_3$ (applicable to N_1) which is applicable to a net on Q.

It is readily found by differentiation that the left hand members of the equations

$$\theta_3 + \theta_1 - 2\Sigma e x' x'' = 0, \qquad \theta_1 - \theta_2 - 2\Sigma e x' x'' = 0 \tag{100}$$

are constants. If we take θ_1'' and θ_2' as given by (100), we find that

$$\theta_{31} = \theta_1 - \frac{\theta_3}{\theta_3''}\theta_1'', \qquad \theta_{32} = \theta_2 - \frac{\theta_3}{\theta_3'}\theta_2'.$$

These are the conditions that N and $\overset{\backprime}{N}_3$ are in relation T (¹).

When $k = k'$, the functions θ_3 and θ_3'' are not defined by (98), and consequently there are 2 families of ∞^1 nets parallel to N_3 defined by (97). Hence there are ∞^1 functions θ_{31}, and ∞^1 functions θ_{32}, which give nets $\overset{\backprime}{N}_3$ in relation B_k with $\overline{N}_3$ and relation T_k with N. Equations (96) and (98) are satisfied by

$$h_3 = \alpha h_1 + \beta h_2, \qquad l_3 = \alpha l_1 + \beta l_2, \qquad x'' = \alpha x + \beta x', \qquad \ldots.$$

where α and β are constants, in consequence of (84) and (85).

Similar results hold for the transformations T_k and B_k of nets applicable to the paraboloid.

Hence :

The transformations B_k *and* T_k *of a surface applicable to a quadric are permutable.*

9. *Permutability of transformations* T_k *and* H. — By definition two surfaces S and $\overset{\backprime}{S}$ are *conjugate in deformation*, if the asymptotic lines correspond on S and $\overset{\backprime}{S}$ and to each deform of S there corresponds a deform of $\overset{\backprime}{S}$ with asymptotic lines in correspondence on

(¹) *M*.

these deforms. Servant has shown that aside from surfaces applicable to a surface of revolution the only surfaces admitting surfaces conjugate in deformation are surfaces applicable to a quadric, and any such surface has this property. If S and $\bar{S}$ are two such surfaces, the quadrics Q and $\bar{Q}$ to which they are applicable are conjugate in deformation and are in fact projective transforms of one mother. Moreover, if a surface S applicable to Q is known, the corresponding surface applicable to $\bar{Q}$ is known intrinsically, that is its fundamental coefficients are known. Bianchi [1] says that S and $\bar{S}$ are in the relation of *a transformation* H.

It is readily shown that a transformation H transforms the permanent net N on S into the permanent net $\bar{N}$ on $\bar{S}$. Let N_0 and $\bar{N}_0$ denote the corresponding nets on Q and $\bar{Q}$. Let N_{01} denote a T_k transform of N_0, and N_1 the corresponding T_k transform of N, in accordance with the results of §§ 4, 5. Since $\bar{Q}$ is a projective transform of Q, and any transformation T is transformed into a transformation $\bar{T}$ by a projectivity, it follows that the projective transform of N_0, is a permanent net $\bar{N}_0$, which is a T_k transform of $\bar{N}_0$. Consequently the net $\bar{N}$, applicable to $\bar{N}_0$, is a T_k transform of $\bar{N}$. Hence we have the theorem :

If N *and* $\bar{N}$ *are nets in relation* H, *and* N_1 *is a* T_k *transform of* N, *there exists a net* $\bar{N}_1$ *which is a* T_k *transform of* $\bar{N}$ *and the* H *transform of* N.

Thus we have established the permutability of transformations T_k and H.

---

(1) *B.*, p. 214.

ERRATA.

Page 48, *ajouter* a la fin du théorème la note suivante :
Cf. Calapso, *Annali di Matematica*, 3e série, vol. XIX, 1912, p. 61.

Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations;

PAR HENRI LEBESGUE.

Dans un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, paru en 1914 (*Théorèmes sur les courbes et les surfaces fermées*), M. R. Bricard traitait la question suivante : « Quel est le plus petit rayon R que l'on puisse choisir tel que tout ensemble, formé de points d'un plan dont les distances mutuelles soient au plus égales à un nombre donné D, puisse être enfermé dans une circonférence de rayon R. » En d'autres termes, supposons que, dans un morceau de carton par exemple, nous découpions un cercle, quel rayon faudra-t-il donner à ce cercle pour qu'avec le « couvercle », ainsi obtenu, nous puissions recouvrir tous les ensembles considérés, que l'on appelle les ensembles de largeur D.

Cette question ainsi que son analogue relative à l'espace est résolue très simplement par M. Bricard ; elle avait été traitée antérieurement par M. H. Jung dans deux articles du *Journal de Crelle*, Bd 129 et 137. Elle a fait depuis l'objet d'une courte Note de M. J. Pál (*Nouvelles Annales*, 1915).

L'article de M. Bricard appela mon attention sur la question, qui me fournit la matière de la communication, sorte de petite conférence, que je fis à la Société mathématique, le 1er avril 1914, à l'occasion de la réunion à Paris de la Conférence internationale de l'Enseignement mathématique. La rédaction de cette conférence, faite à l'époque, constitue les douze premiers numéros de ce Mémoire ; ce qui explique le mode d'exposition de certains paragraphes. J'y ai ajouté le déve-

loppement d'une autre communication faite peu après à la Société mathématique [1]. J'avais d'abord eu l'intention de réunir ces remarques avec d'autres analogues concernant des questions qui présentent ce caractère commun de relever du calcul des variations et de n'appartenir cependant pas aux types de problèmes étudiés dans ce calcul; celles que je considère ici suffiront pour faire comprendre de quels problèmes il s'agit. Les méthodes classiques, convenablement modifiées, s'y appliquent beaucoup plus souvent qu'on ne serait tenté de le croire [2]; c'est un point qui ne ressortira pas de ce Mémoire où je traite les questions surtout par des procédés de géométrie élémentaire, mais que je tiens à indiquer pour que le lecteur ne croie pas que l'analyse classique le laisse complètement désarmé en face des problèmes que je vais indiquer.

Revenons au problème de M. Bricard et considérons un ensemble E de largeur D; le plus petit couvercle qui lui convienne a un rayon R(E), fonction de l'ensemble E. C'est le maximum de R(E) qu'il faut chercher; et il suffit évidemment de considérer le cas où l'ensemble E est une courbe convexe C de largeur D. Nous avons donc à rechercher le maximum d'une fonction de ligne, R(C), d'une fonctionnelle comme on dit maintenant. Seulement, cette fonctionnelle ne s'exprime pas à l'aide d'une intégrale comme celles auxquelles on se borne dans le Calcul des Variations,

$$J = \int f[x, y(x), y'(x)]\,dx,$$

par exemple. Quelle que soit l'importance des fonctionnelles du type J, on voit que des questions très simples conduisent à en considérer d'autres.

Après les fonctionnelles du type J, celles qui se présentent de suite à l'esprit sont celles qu'on obtiendrait en prenant une fonction ordinaire composée à l'aide d'intégrales J; un produit ou un quotient d'intégrales, par exemple. Je ne crois pas que les problèmes de ce

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'année* 1914, p. 43 et 72.

(2) Ceci deviendra plus fréquent encore quand on utilisera les résultats du travail fondamental de M. Tonelli : *Sur une méthode directe du Calcul des Variations* (*Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo*, t. XXXIX).

type aient été encore abordés, bien que M. Fréchet [1] se soit occupé avec succès de la différentiation des fonctionnelles les plus générales. La méthode que j'indique pour traiter le problème des isopérimètres, traduite analytiquement, apparaît comme la recherche de minimum d'une expression $\frac{J^2}{J_1}$; elle s'appliquerait aussi à la recherche du minimum d'autres expressions, très particulières à la vérité, formées à l'aide d'intégrales.

Dans le problème de M. Bricard, la fonction $R(C)$ dont on a à chercher le maximum ne s'exprime d'aucune manière à l'aide d'intégrales J; je montre qu'elle n'est cependant pas nouvelle. Si, en effet, $p(\varphi)$ est la distance de l'origine à la tangente à C de direction φ, $R(C) - \frac{D}{2}$ est la meilleure approximation, au sens de Tchebycheff, de $p(\varphi)$ par une expression

$$A\cos\varphi + B\sin\varphi + D.$$

Et la recherche du maximum de $R(C)$ est celle de la limite supérieure de la meilleure approximation pour la classe des fonctions $p(\varphi)$ considérées. Il s'agit donc d'une question analogue à celles qui ont fait récemment l'objet des études de MM. Dunham Jackson, Serge Bernstein, de la Vallée Poussin. Seulement, nous avons à calculer ici une limite exacte de l'approximation et non pas seulement l'ordre de grandeur de cette approximation: cette question d'approximation conduit donc à rechercher le minimum d'une fonctionnelle qui n'est pas une intégrale J [2].

Dans la recherche de ce maximum, on peut se borner à la considération de certaines courbes convexes C, déjà rencontrées par Euler, qui jouissent de la propriété curieuse d'avoir la même largeur dans toute direction, c'est-à-dire que chacune de leurs normales est normale double.

Ces orbiformes, comme on les appelle, ont toutes la même longueur

---

[1] *Sur la notion de différentielle d'une fonction de lignes* (*Trans. of the Am. Math. Sc.*, 1914).

[2] Comparer avec les questions d'approximation traitées dans mon article : *Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz* (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1910).

que la circonférence de même largeur. Les orbiformes de largeur D ayant toutes la même longueur πD, on est naturellement conduit à comparer les aires de ces orbiformes; c'est, on le sait à l'avance, l'orbiforme circulaire qui a l'aire maximum; mais quelle est l'orbiforme d'aire minimum? Cette fois nous avons à rechercher le minimum d'une fonctionnelle de la forme J; mais, tandis qu'il s'agit d'une intégrale dont le calcul des variations classique nous fournirait le maximum, c'est du minimum que nous nous occupons. On est donc certain à l'avance que ce minimum sera obtenu pour une fonction frontière du champ fonctionnel envisagé: mais cette remarque est très insuffisante.

Quand il s'agit d'une fonction de points, de $f(x, y, z)$ par exemple, savoir que le minimum est obtenu sur la frontière du domaine, c'est savoir que le problème est d'un degré moins difficile puisqu'on se trouve ramené à la recherche du minimum d'une fonction $\varphi(u, v)$ des deux variables définissant un point de la surface frontière.

Quand il s'agit d'une fonctionnelle J(C), définie dans les champs que l'on considère ordinairement et auxquels s'applique l'analyse classique, on a un résultat de même nature; car le calcul de la variation de J montre que C ne peut être extrémale que si, sur chacun de ses arcs, si petit qu'il soit, on aperçoit que c'est une courbe frontière. Par exemple, si le champ fonctionnel est défini par

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

on devra avoir *en tout point*

$$f(x, y, y', y'') = 0;$$

et y est à choisir dans une famille de fonctions dépendant de constantes arbitraires; nous avons affaire à un problème de minimum d'une fonction de plusieurs variables.

Dans le cas actuel on a encore cette propriété que la courbe extrémale C est frontière du champ fonctionnel, en chaque point si je puis dire [1]. Et le minimum s'en déduit facilement; il est donné par l'orbiforme équilatérale, c'est-à-dire par la courbe formée par les trois arcs

---

[1] C'est là une propriété que l'on pourrait obtenir grâce à des modifications assez profondes de l'analyse classique et que je démontrerai ici par des artifices géométriques. Je compte revenir ailleurs sur ce point.

de circonférences décrits des trois sommets d'un triangle équilatéral comme centres, chacun d'eux étant sous-tendu par le côté opposé à son centre.

On voit que la géométrie conduit tout naturellement à la recherche de maximum et minimum qui sont obtenus pour des courbes ou fonctions qui sont, en tout point, à la frontière du domaine fonctionnel considéré.

Sans sortir de l'ordre de questions considérées ici, voici deux problèmes du même genre. Quelle est, parmi toutes les orbiformes de largeur D qui admettent un couvercle circulaire de rayon ρ, celle qui a la plus petite aire? La solution du problème de M. Bricard montre qu'il faut supposer ρ compris entre $\frac{D}{2}$ et $\frac{D}{\sqrt{3}}$; la solution est alors donnée par l'orbiforme construite de la façon suivante : Prenons trois points A, O, A′ en ligne droite, $AO = D - \rho$, $OA' = \rho$, $AA' = D$ et, de A′ comme centre, décrivons un arc de cercle AB qui sera tel que $OB = OA'$, vu de O sous un angle ρ inférieur à $\frac{\pi}{3}$. Puis, de O comme centre, traçons deux arcs de cercle aA, Bb, vus de O sous l'angle $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \rho\right)$. La courbe aABb formée de trois arcs de cercle est le sixième de l'orbiforme cherchée, laquelle admet Oa et Ob pour axes de symétrie.

Guidé par ce qui suit, on démontrera facilement ce résultat; voici une autre question dont, au contraire, j'ignore la solution. On peut la formuler comme il suit. Dans le problème de M. Bricard, on se demande quel est le plus petit couvercle, parmi ceux qui conviennent à la fois à tous les ensembles de largeur D, et qui sont de forme donnée : la forme circulaire. Plus généralement demandons-nous quel est, de tous les couvercles de forme arbitraire qui conviennent pour tous les ensembles de largeur D, celui de plus petite aire ou de plus petit périmètre [1].

---

[1] Sur cette question, on pourra consulter un article de M. Julius Pal : *Ueber ein elementares Variationsproblem* (*Det Kgl. Danske Vidensk. Selskab-Mat. fys.*, t. III, 2; 1920).

Dans une très courte Note (*Actes de la Société helvétique des Sciences naturelles*, t. II, 1917), M. le Dr Kollros traite aussi d'un problème en rapport avec les questions étudiées ici.

1. Considérons un ensemble E de points; si P et Q sont deux points de E, l'ensemble des distances PQ a une borne supérieure : cette borne s'appelle l'*élongation* ou le *diamètre* de l'ensemble E. Quand ce diamètre est fini, E est dit *borné*.

Nous nous proposons de trouver la plus petite valeur de R, *telle que tout ensemble plan de diamètre* D *puisse être enfermé dans une circonférence de rayon* R. On entend par là que tous les points de E doivent être, soit à l'intérieur de cette circonférence, soit sur elle.

Pour éviter des précautions de langage, sans cela nécessaires, nous supposerons que E est fermé, c'est-à-dire tel que tout point limite de points de E appartienne aussi à E. Si l'ensemble donné E n'était pas fermé, en lui ajoutant ses points limites, on aurait un ensemble fermé de même diamètre que E.

Si l'on considère un nombre $f(P)$ fonction de la position d'un point P d'un ensemble fermé E, la continuité de cette fonction se définit comme pour le cas où E est un segment fini de droite ou un domaine borné du plan ou de l'espace. On démontre, comme dans le cas classique, qu'une fonction continue des points d'un ensemble fermé borné atteint sa limite supérieure et sa limite inférieure.

Soient E un ensemble plan, fermé et borné, A un point de son plan, P un point quelconque de E. La distance AP est une fonction continue du point P de E, elle atteint sa limite supérieure $\rho(A)$ pour une position P_0 de P. Soit B un autre point du plan, on a évidemment $\rho(B) \geq BP_0$, donc

$$\rho(A) - \rho(B) \leq |AP_0 - BP_0| \leq AB.$$

Puisque A et B sont deux points quelconques du plan, nous pouvons conclure

$$|\rho(A) - \rho(B)| \leq AB,$$

et la fonction $\rho(A)$ est continue. D'ailleurs, quand A s'éloigne à l'infini, $\rho(A)$ grandit indéfiniment, donc la fonction $\rho(A)$ atteint sa limite inférieure ρ pour une position au moins de A.

Cette limite inférieure ne peut d'ailleurs pas être atteinte pour deux positions de A; si, en effet, elle était atteinte pour les positions A_1 et A_2, E serait enfermé dans la partie commune aux deux cercles égaux de rayon ρ et de centres A_1 et A_2, donc dans le cercle décrit

sur la corde commune à ces deux cercles comme diamètre. Or ce dernier cercle serait de rayon plus petit que ρ, ce qui est impossible.

Donc, *parmi toutes les circonférences qui entourent un ensemble donné* E, *il y en a toujours une qui a un rayon plus petit que toutes les autres*. Nous l'appellerons *circonférence circonscrite* à E.

2. Relativement à cette circonférence circonscrite, je démontrerai, avec M. Bricard, le théorème suivant :

Pour qu'une circonférence C, *enfermant un ensemble fermé* E, *soit la circonférence circonscrite, il faut et il suffit que les points communs à* E *et à* C *n'appartiennent pas tous à un même arc de cercle* C′ *plus petit qu'une demi-circonférence.*

La condition est suffisante. — Si elle est remplie, en effet, toute autre circonférence Γ, contenant E, doit contenir un arc C′ au moins égal à la moitié de C; donc Γ a un rayon plus grand que C.

La condition est nécessaire. — Supposons, en effet, que tous les points communs à C et à E soient sur un arc $\alpha\beta\gamma$ de C, inférieur à la moitié de C, et soit $\alpha'\beta'\gamma'$ un arc de C, supérieur à la moitié de C, et n'ayant aucun point commun avec $\alpha\beta\gamma$. Faisons passer par α' et γ' un cercle C′ voisin de C et de rayon un peu inférieur. Les seuls points du plan qui soient intérieurs à C sans être intérieurs à C′ sont des points voisins de $\alpha'\beta'\gamma'$. Comme il n'y a pas de points de E voisins de $\alpha'\beta'\gamma'$, si C′ est très peu différent de C, C′ contient E et C n'est pas la circonférence circonscrite à E.

3. La proposition de M. Bricard étant obtenue, la recherche du nombre R est presque achevée. Pour un ensemble E de diamètre D, la circonférence circonscrite C, de rayon ρ, doit avoir en commun avec D des points n'appartenant pas tous à la même moitié de C. Soient α et β deux points communs à E et C, soient α', β' les points de C diamétralement opposés à α et β. Si α' ou β' appartient à E, alors $2\rho = D$. S'il n'en est pas ainsi, ou bien il y a sur l'arc $\alpha'\beta'$ un point γ au moins de E et un tel point forme avec α et β un triangle acutangle, ou bien il y a des points de E à la fois sur $\alpha\beta'$ et sur $\alpha'\beta$.

Dans ce dernier cas, soient λ le dernier de ces points rencontré en allant de α vers β' et μ le dernier rencontré en allant de β vers α'. L'arc $\lambda\beta'\alpha'\mu$ est inférieur ou au plus égal à une demi-circonférence, car il ne contient pas de points de E. Donc, ou $\lambda\mu = 2\rho = D$, ou le triangle $\lambda\mu\alpha$ est acutangle. Si donc on n'a pas $2\rho = D$, on est certain de trouver un triangle acutangle $\alpha\beta\gamma$, ou $\alpha\lambda\mu$, formé de points de E et inscrit dans C (¹). Un tel triangle, s'il n'est pas équilatéral, a un de ses côtés au moins supérieur au côté du triangle équilatéral inscrit; donc on a alors

$$D > \rho\sqrt{3}.$$

Dans tous les cas on a donc

$$\rho = \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, on a

$$R = \frac{D}{\sqrt{3}};$$

cette valeur minimum étant d'ailleurs atteinte, par exemple, pour le cas où E est un triangle équilatéral de côté D.

4. Les définitions et les raisonnements des n°s 1 et 2 s'appliquent de suite, moyennant des modifications de mots évidentes, au cas des ensembles de l'espace ordinaire. Si l'on appelle « ensemble de l'espace à n dimensions » les ensembles de systèmes de n nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ces définitions et raisonnements s'appliquent encore facilement. Il faudra naturellement y remplacer la considération des circonférences par celle des hypercirconférences qui sont les variétés à $n-1$ dimensions définies par des équations de la forme

$$(X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + \ldots + (X_n - x_n)^2 = R^2,$$

dans lesquelles les X sont les coordonnées courantes, les x les coor-

(¹) Je n'ai pas voulu admettre sans démonstration que si l'on a un ensemble de points d'une circonférence, fermé et qui ne peut être enfermé dans une demi-circonférence, il y a trois points de cet ensemble qui forment un triangle acutangle ou deux points qui sont diamétralement opposés, parce que le fait analogue pour l'espace ne me paraît nullement évident. Aussi, pour le cas de l'espace, le raisonnement de M. Bricard aurait besoin, il me semble, d'être complété.

données du centre; le premier membre est le carré de la distance des deux points X, x: le second membre est le carré du rayon.

Une telle variété est la frontière du domaine correspondant au cercle; ce domaine, un hypercercle, est donc défini par l'inégalité

$$(X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + \ldots + (X_n - x_n)^2 \leq R^2.$$

Les théorèmes des n^{os} **1** et **2** étant acquis pour le cas général, pour achever la détermination du rayon R_n des plus petits hypercercles égaux dans lesquels on puisse enfermer tous les ensembles de diamètre D de l'espace à n dimensions, il va falloir imiter le raisonnement du n° **5**. Le triangle équilatéral ou régulier sera remplacé par l'hypertriangle régulier, c'est-à-dire, si l'on veut, la figure formée par $n-1$ points situés deux à deux à la distance D. Si l'on désigne par h_n la hauteur d'un hypertriangle régulier et ρ_n le rayon de l'hypercirconférence circonscrite, on voit facilement que l'on a

$$\rho_n = \frac{n}{n+1} h_n, \qquad \overline{\rho_{n-1}}^2 + h_n^2 = D^2;$$

d'où, puisque $\rho_2^2 = \frac{D^2}{3} = \frac{2^2}{3^2}\left[1 - \frac{1^2}{2^2}\right] D^2 = \frac{2^2 - 1^2}{3^2} D^2$,

$$\rho_3^2 = \frac{3^2}{4^2}\left[1 - \frac{2^2}{3^2}\left[1 - \frac{1^2}{2^2}\right]\right] D^2 = \frac{3^2 - 2^2 + 1^2}{4^2} D_2,$$

$$\rho_4^2 = \frac{4^2}{5^2}\left[1 - \frac{3^2}{4^2}\left[1 - \frac{2^2}{3^2}\left[1 - \frac{1^2}{2^2}\right]\right]\right] D^2 = \frac{4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2}{5^2} D^2, \quad \ldots.$$

La sommation donne finalement

$$\rho_n^2 = \frac{n}{2(n+1)} D^2.$$

L'hypertriangle régulier étant un ensemble de largeur D, on a

$$R_n \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\, D.$$

Je vais démontrer que, pour n quelconque comme pour $n = 2$, c'est le signe $=$ qui convient. Pour cela, il suffira de prouver, ce qui a été fait au n° **5** pour $n = 2$, que si l'on a sur une hypercirconférence un ensemble fermé de points qui ne peut être enfermé dans une moitié de cette hypercirconférence, il y a deux de ces points dont la distance

est égale ou supérieure au côté de l'hypertriangle régulier inscrit. Le raisonnement est un raisonnement de proche en proche, il suffira d'indiquer comment on passe de $n = 2$ à $n = 3$.

Remarquons d'abord que, si l'on a sur une sphère un ensemble fermé E de points, les théorèmes des n^{os} **1** et **2** s'appliquent à la recherche de la plus petite calotte sphérique contenant E.

Ceci étant, soit, sur une sphère S de rayon ρ, un ensemble fermé e de points, ensemble qui ne peut être tout entier enfermé dans une moitié de la sphère S. Soient a, b deux points de e dont la distance d ait la valeur la plus grande possible; on a évidemment $\rho\sqrt{2} \leq d \leq 2\rho$. Le petit cercle de S, qui passe par b et qui admet a pour pôle, a un rayon égal à $\frac{d\sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho}$.

Ce petit cercle partage S en deux zones, dont l'une Z, la plus grande, contient e, l'autre ne contenant aucun point de e. Soit γ la frontière de la plus petite zone contenant e, laquelle, étant contenue dans Z et contenant une demi sphère, a un rayon au moins égal à $\frac{d\sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho}$.

Sur γ, d'après **3**, il y a deux points de e qui sont distants au moins de

$$\frac{d\sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho}\sqrt{3}$$

et l'on doit avoir

$$\frac{d\sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho}\sqrt{3} \leq d,$$

d'où

$$\sqrt{\frac{8}{3}}\rho \leq d.$$

Finalement, on a donc

$$\sqrt{\frac{8}{3}}\rho \leq d \leq 2\rho,$$

les limites extrêmes étant atteintes dans le cas où des points de e sont sommets d'un tétraèdre régulier et dans le cas où des points de e sont diamétralement opposés.

Finalement il est ainsi prouvé que

$$R_n = \sqrt{\frac{3}{8}}D.$$

Le passage de n à $n+1$ se fait exactement de même, l'inégalité précédente devient

$$\frac{d\sqrt{4\rho^2 - d^2}}{2\rho} \leqslant \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\, d,$$

d'où

$$4\rho^2[2(n+1) - n] \geqslant 2(n+1)d^2,$$

$$\rho \geqslant \sqrt{\frac{n+1}{2(n+2)}}\, d$$

3. Nous bornant au cas des ensembles plans, nous allons traiter la même question d'une façon moins simple et moins rapide, mais qui nous montrera le lien intime qui lie le problème posé à celui de la meilleure approximation avec laquelle on peut représenter une fonction continue par une série limitée de Fourier, problème considéré d'abord par Tchebycheff.

Notre point de départ sera une utilisation plus systématique de cette remarque : il n'y a pas besoin de considérer le cas de tous les ensembles de diamètre D, on peut se borner à certains d'entre eux. Ceci nous a déjà permis de ne considérer que les ensembles fermés.

Nous dirons qu'un ensemble E de diamètre D est *complet* s'il est impossible de lui adjoindre des points tout en lui laissant le même diamètre D. Nous allons démontrer que *tout ensemble de diamètre* D *fait partie d'un ensemble complet de diamètre* D.

Soit E un ensemble fermé de diamètre D; s'il n'est pas complet, nous pouvons, sans modifier son diamètre, lui ajouter des points. Soient A l'un d'eux, B le point de E le plus voisin de A, ou l'un des plus voisins. Soient C_1 et C_2 les points de rencontre des cercles de rayon D décrits de A et B comme centres. Soient enfin AMB, ANB les arcs de cercle de rayon D décrits de C_1 et C_2 comme centres. Tous les points compris entre AMB et ANB peuvent être ajoutés à E sans changer le diamètre D de l'ensemble. Certains de ces points font peut-être déjà partie de l'ensemble E, mais les points du segment AB n'en font pas partie et comme E est fermé nous voyons que si d'un point de AB comme centre, on décrit un cercle assez petit, tous les points de ce cercle, dont aucun ne faisait partie de E, peuvent être ajoutés à E.

Ceci étant, soit E un ensemble de diamètre D; je lui ajoute ses points limites. Si l'ensemble obtenu e n'est pas complet, je lui ajoute le plus grand cercle λ [1] qu'il soit possible de lui ajouter sans augmenter son diamètre; s'il y a plusieurs tels cercles, j'ajoute l'un quelconque choisi d'après une loi que chacun prendra à sa volonté et qu'il serait puéril de préciser une fois pour toutes.

Si l'ensemble $e + \lambda$ ainsi obtenu n'est pas complet, je lui ajoute le plus grand cercle possible λ_1, etc.

Si l'on est arrêté au bout d'un nombre fini d'opérations, le théorème est démontré pour l'ensemble E considéré; sinon, je dis que l'ensemble fermé obtenu en ajoutant à $e + \lambda + \lambda_1 + \ldots$ ses points limites, qui est évidemment de diamètre D, est complet. En effet, s'il ne l'était pas, on pourrait lui ajouter les points d'un cercle λ et λ_1, λ_2, ... devraient être tous au moins aussi grands que λ. Or cela est impossible, car ils sont sans points communs deux à deux et tous intérieurs à une circonférence de rayon D décrite d'un point quelconque de E comme centre.

6. Ainsi, pour trouver le maximum du rayon de la circonférence circonscrite aux ensembles de largeur D, nous pouvons nous borner à la considération des ensembles complets de largeur D. Étudions ces ensembles.

La distance d'un point quelconque M à un point C d'un segment AB étant plus petite que la plus grande des deux distances MA, MB, si deux points A et B font partie d'un ensemble complet, tous les points du segment AB en font aussi partie. Donc les ensembles complets sont des domaines convexes, c'est-à-dire l'ensemble des points d'un contour convexe et des points intérieurs à un tel contour. Un contour convexe qui limite un domaine constituant un ensemble complet, s'appelle *une courbe orbiforme*.

Soit A un point d'une orbiforme Γ. Γ est tout entière à l'intérieur de la circonférence de rayon D et de centre A. Je dis que cette circon-

---

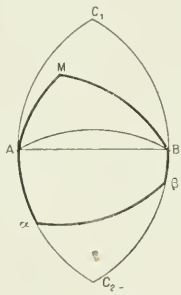
[1] Il peut y avoir des points frontières de λ qui appartiennent à e, mais aucun point intérieur à λ ne doit appartenir à e. J'omets la preuve du fait que les rayons des cercles qu'on peut ajouter à e atteignent leur limite supérieure.

férence a un point commun au moins avec Γ; sans quoi, en effet, la plus grande distance de A aux points de Γ serait inférieure à D, soit D — ε. En ajoutant au domaine Δ limité par Γ les points du cercle de rayon ε et de centre A, et certains de ces points sont extérieurs à Δ, on aurait encore un ensemble de largeur D; donc Δ ne formerait pas un ensemble complet, Γ ne serait pas une orbiforme.

Ainsi la circonférence de rayon D et de centre A touche l'orbiforme en un point B, la circonférence égale de centre B passe par A. Ces deux circonférences se coupent en C_1, C_2 et Γ est dans le fuseau limité par les arcs C_1AC_2, C_2BC_1.

Soit M un autre point de Γ: supposons-le situé dans le triangle cur-

Fig. 1.



viligne ABC_1. M ne peut être entre la corde AB et l'arc AB de centre C_2, car tous les points de cette région, étant distants de moins de D de tous les points du fuseau, sont intérieurs à Γ. Il résulte de là que la circonférence de rayon D décrite de M coupe l'arc AC_2 en un point α et l'arc BC_2 en un point β. Γ est tout entière dans le triangle curviligne $C_1\alpha\beta$. $\alpha\beta$ contient d'ailleurs des points de Γ, car M est distant de moins de D de tous les points intérieurs au triangle $C_1\alpha\beta$ et des points des côtés $C_1A\alpha$, $C_1B\beta$ (α et β exclus).

Traçons les arcs de rayon D et de centres α et β joignant respectivement BM et AM. Nous obtenons un pentagone Π limité par les arcs AM, MB, Bβ, Bα, αA.

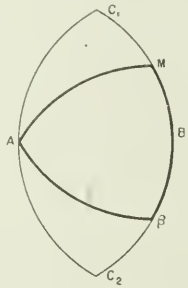
Si l'arc αβ fait tout entier partie de Γ, Γ ne peut pas avoir de points

extérieurs à H; d'ailleurs, H étant évidemment une courbe orbiforme, Γ ne diffère pas de H. Si certains points de $\alpha\beta$ ne font pas partie de Γ, l'ensemble complet limité par Γ pourra, au voisinage de M, sortir de H; mais, en ce voisinage, il contiendra tous les points de H et tous les points intérieurs à H.

Pour énoncer les résultats obtenus, rappelons que l'on appelle *tangente* (ou droite d'appui) d'un contour convexe en un point P toute droite passant par P et ne passant par aucun point intérieur au contour. Une perpendiculaire en P à une tangente en P est une *normale* en P.

Les tangentes en A et B aux arcs C_1AC_2, C_1BC_2 sont des tangentes à Γ; AB est donc une normale double à Γ et sa longueur est D. Les tangentes à Γ en M sont tout ou partie des tangentes à H en M, de

Fig. 2.



même pour les normales. C'est dire que les normales en M à Γ rencontrent toutes l'arc $\alpha\beta$. Donc aucune ne passe par A, à moins que α ne soit en A, donc que M soit sur BC_1. Dans ce cas particulier, H devient un triangle curviligne H_1 constitué par trois arcs égaux de rayon D, décrits respectivement des trois sommets, A, M, β d'un triangle équilatéral pour centres, et sous-tendus par les côtés de ce triangle. Γ se réduit à H_1 si tous les points de $A\beta$ font partie de Γ. Si tous n'en font pas partie, Γ diffère de H_1; mais, en tous cas, Γ contient l'arc MB puisque les points de MB ne sont pas à une distance supérieure à D d'aucun des points du triangle $C_1A\beta$.

En résumé, si, de A, on abaisse une normale AB de pied B, AB = D et AB est aussi normale en A : *Toute normale à une orbiforme est normale double, la distance des deux points d'incidence est la largeur de la courbe.*

De A on peut toujours abaisser une telle normale puisque la ou les normales en A répondent à la question. Si l'on a deux normales AB et AM, toutes les droites intermédiaires sont aussi normales et l'orbiforme se réduit, entre B et M, à un arc de cercle de centre A.

A une courbe convexe quelconque on peut toujours mener une tangente dirigée unique; pour une orbiforme on peut dire, de plus, qu'elle a un seul point de contact. Si, en effet, elle touchait la courbe en A et B, les normales AA′ et BB′, de longueur D, feraient connaître deux points A′ et B′ de l'orbiforme. Ce qui est absurde, car AB′ est plus grand que D. *Les tangentes et normales à une orbiforme sont donc déterminées par leur inclinaison et varient de façon continue avec elle.*

7. Considérons une orbiforme Γ analytique, ou à laquelle du moins s'applique la théorie des développées. En chaque point de Γ, le rayon de courbure compté vers l'intérieur de Γ sera compris entre zéro et D, les valeurs extrêmes pouvant être atteintes. La développée Δ de Γ sera une courbe à distance finie, à laquelle, parallèlement à chaque droite, on ne pourra mener qu'une tangente. En d'autres termes, les tangentes à Δ de directions α et $\alpha + \pi$ seront confondues, quel que soit α. Δ sera donc une courbe ayant un nombre impair de points de rebroussements, trois au moins [1].

Prenons, par exemple, pour Δ, une hypocycloïde à trois rebroussements; et soit Γ une de ses développantes. Soient ω un point décrivant Δ, ωt la tangente en ω affectée d'un sens variant de façon continue avec ω. Quand ω a parcouru tout Δ, ωt ne revient pas à sa position primitive, mais dans le prolongement de cette position primitive, le sens étant différent.

---

[1] J'omets les démonstrations rigoureuses; les faits énoncés dans les nos 7 et 8 ne seront pas utilisés, ils sont donnés pour familiariser avec la notion d'orbiforme.

Quant au point M de ωt qui décrit Γ, il vient, après cette révolution, dans une position M_1; un calcul immédiat montre que M et M_1 sont symétriques par rapport au point de ωt qui décrit celle des développantes de Λ qui est une hypocycloïde.

Quand ω a décrit deux fois Λ, ωt revient exactement à sa position primitive et Γ se ferme. Γ a donc pour normale double toute tangente à Λ, c'est une courbe parallèle à elle-même; c'est une courbe doublement parallèle à l'hypocycloïde dont Λ est la développée. Si donc Γ est convexe, Γ est une orbiforme.

On comprend ainsi qu'Euler ait été conduit à la notion de courbe orbiforme par l'étude des développantes des courbes triangulaires, c'est-à-dire des courbes, analogues à l'hypocycloïde à trois rebroussements, formées par trois arcs de courbes convexes raccordés par des points de rebroussement de première espèce. L'étude des courbes parallèles aux courbes triangulaires, ou à 5, 7, ... points de rebroussement, y conduirait aussi.

Déformons une courbe triangulaire de façon que les trois arcs qui la composent diffèrent de moins en moins des côtés du triangle des rebroussements et prenons chaque fois la plus petite développante orbiforme; si le triangle des rebroussements est équilatéral, nous obtiendrons à la limite l'orbiforme équilatérale, que nous avons déjà rencontrée et que nous avions désignée par H_1. Pour H_1, ce qui joue le rôle de la développée, c'est le triangle $\Lambda M\beta$. Pour H, ce serait la figure, limite d'une courbe à cinq rebroussements, formée par les droites ΛB, $B\alpha$, αM, $M\beta$, $\beta\Lambda$.

Si l'on imagine que, dans les déformations dont il vient d'être parlé, les longueurs des arcs des courbes développées, triangulaires par exemple, sont conservées, on peut établir une correspondance entre les points ω de ces différentes développées transformées. Et si l'on imagine que, dans la déformation d'une développée Λ, chaque tangente ωt emporte le segment ωM qui va du point ω de Λ au point M de sa développante Γ, on établit aussi une correspondance précise entre les diverses développantes. En particulier, dans le cas où Λ est triangulaire, les différentes développantes triangulaires des Λ déformées se correspondent. Or, transformons Λ en un triangle ABC, ce qui est toujours possible, car entre les trois arcs a, b, c, on a évidemment des inégalités telles que $a < b + c$. La développante trian-

gulaire, dans le cas du triangle ABC, est constituée par trois arcs de cercles de centres A, B, C et tangents entre eux. Les points de contact de ces cercles sont les points de contact avec AB, BC, CA, du cercle inscrit dans ABC. De sorte que les points de rebroussements de cette développante partagent les arcs de la développée en morceaux de longueurs connues $p - a$, $p - b$, $p - c$.

Ce que je veux faire remarquer surtout, c'est que l'orbiforme équilatérale est la plus petite courbe convexe qui soit parallèle à la courbe triangulaire formée de trois arcs de cercles égaux. De même, il est la plus petite courbe convexe parallèle à une courbe à cinq rebroussements formée par cinq arcs de cercle de rayons égaux.

8. Ce n'est pas seulement par la géométrie analytique que la notion de courbe orbiforme s'est imposée aux mathématiciens; si les courbes parallèles aux courbes à 3, 5, ... points d'inflexions et très voisines de ces courbes ont reçu une application mécanique, car ce sont les formes de rails qu'on peut adopter pour qu'en parcourant la voie ainsi construite une locomotive se trouve retournée bout pour bout [1], les courbes convexes parallèles à ces courbes-là sont aussi utiles industriellement.

Pour transformer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne on emploie quelquefois une came agissant sur une pièce P, dont le mouvement rectiligne est guidé par l'un ou l'autre des deux bords parallèles d'une entaille faite dans P, entaille entre les bords de laquelle la came peut tourner. On voit de suite que, si l'on veut que le mouvement puisse avoir lieu dans les deux sens, auquel cas la came doit toucher constamment les deux bords de l'entaille et si le mouvement de la came doit être révolutif complet, il faut que cette came soit limitée par une orbiforme.

C'est surtout à l'occasion de probabilités géométriques que les orbiformes ont été étudiées. La plus simple des questions de probabilités géométriques est celle de l'aiguille de Buffon : *On jette au hasard une aiguille sur un plancher, quelle est la probabilité pour qu'elle rencontre une raie du plancher?* Convenons d'attribuer à un

---

[1] Et cela, parce que quand ω parcourt une fois A, ωt ne revient à sa position primitive qu'au sens près, n° 7.

coup le poids n si l'aiguille rencontre n fois les raies du plancher, soit parce que l'aiguille est très longue par rapport à la largeur des lames du parquet, soit parce que l'aiguille est courbe. Dans tous les cas on peut partager l'aiguille en éléments de même longueur assez petite pour que chaque élément puisse être regardé comme rectiligne et soit moindre que l'écartement des raies du plancher. La probabilité pour qu'un élément déterminé rencontre les raies est alors la même pour tous les éléments et la probabilité pour l'aiguille tout entière, étant la somme de ces probabilités élémentaires, est proportionnelle à la longueur de l'aiguille ([1]).

D'autre part, la probabilité pour que l'aiguille, supposée tombée dans une orientation déterminée, rencontre les raies ne dépend que de l'écartement des tangentes à l'aiguille qui sont parallèles aux raies.

Or, si l'aiguille est une orbiforme, cet écartement est indépendant de l'orientation de l'aiguille, c'est le diamètre de l'orbiforme et par suite l'étude de cette forme d'aiguille s'imposait. Pour une aiguille orbiforme, la probabilité ne dépend que du diamètre.

En rapprochant cela de ce qui précède, on voit que toutes les orbiformes de même diamètre ont même longueur.

Nous retrouverons cela plus tard. Je reviens maintenant à la question de M. Bricard.

9. Soit A un point du plan d'une orbiforme Γ de diamètre D. Soit C_A le plus petit cercle de centre A contenant Γ, soit R_A son rayon. C_A a au moins un point commun avec Γ, sans quoi on pourrait rapetisser C_A; soit B un point commun à C_A et à Γ. AB étant normale à Γ en B est aussi normale à Γ en un autre point C, situé sur la demi-droite indéfinie BA d'origine B, à la distance D de B.

Si A est intérieur à Γ, ces points ont la disposition BAC et $R_A < D$; si A est extérieur, on a la disposition BCA et $R_A > D$. Plaçons-nous

---

([1]) Cette remarque capitale est due à Barbier qui a le premier établi la relation entre les questions de probabilités et les propriétés des orbiformes (*Journal de Math.*, 1860). Je tire cette référence d'un petit Livre : *Contribution à l'étude des courbes convexes fermées*, publié à la librairie Hermann par MM. Ch. Jordan et R. Fiedler, dans lequel le lecteur trouvera des renseignements intéressants concernant les orbiformes.

dans la première hypothèse, puisque nous voulons chercher le minimum de R_A, pour A variable. Dans ce cas, le cercle c_A de centre A et passant par C, dont le rayon r_A égale $D - R_A$, est le plus grand cercle de centre A qui soit intérieur à Γ. La recherche du plus petit cercle C_A est équivalente à la recherche du plus grand cercle c_A ou encore, puisque $R_A + r_A = D$, à la recherche du minimum de $R_A - r_A$. Nous allons interpréter cette différence.

Soit Λ la circonférence de centre A et de rayon ρ. Établissons sur Λ et Γ le même sens de parcours direct, les tangentes à Λ et à Γ sont par là même dirigées. Établissons entre Λ et Γ une correspondance par tangentes dirigées parallèles et soit ε le maximum de l'écartement des tangentes correspondantes de Λ et de Γ. Si l'on a $\rho > R_A$, on a évidemment $\varepsilon = \rho - r_A > R_A - r_A$; si l'on a $\rho < r_A$, on a

$$\varepsilon = R_A - \rho > R_A - r_A.$$

Enfin, pour $R_A > \rho > r_A$, la valeur de ε est le plus grand des deux nombres $R_A - \rho$ et $\rho - r_A$. Il résulte de tout cela que le minimum de ε est $\frac{R_A - r_A}{2}$, qui est atteint pour $\rho = \frac{R_A + r_A}{2} = \frac{D}{2}$.

Si A est extérieur à Γ, le minimum de ε est supérieur à $\frac{D}{2}$ et il est obtenu encore pour $\rho = \frac{D}{2}$, comme on le voit facilement.

Donc, trouver le minimum de R_A revient à trouver le minimum de ε, c'est-à-dire à trouver la circonférence qui diffère le moins de Γ quand on établit une correspondance par tangentes parallèles dirigées entre Γ et cette circonférence. C'est un problème à la Tchebycheff.

Représentons la courbe Γ par ses tangentes, comme on le fait toujours quand il s'agit d'une courbe convexe. Soit

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0 \tag{1}$$

l'équation de la tangente dirigée à Γ de direction $\varphi + \frac{\pi}{2}$. p est une fonction $f(\varphi)$ bien déterminée et continue. Si l'origine des coordonnées est intérieure à Γ, p est constamment positif. Dans tous les cas, l'équation $p = f(\varphi)$ peut être considérée comme l'équation de Γ.

Dans le même système de coordonnées polaires tangentielles.

l'équation d'un cercle de rayon R est

$$(2) \qquad \rho = R + a\cos\varphi + b\sin\varphi,$$

a et b étant deux constantes. Pour ce cercle A, la valeur de ε est le maximum de la différence

$$(3) \qquad |f(\varphi) - (R + a\cos\varphi + b\sin\varphi)| = |\delta(\varphi, R, a, b)|.$$

Donc la recherche du minimum de ε est exactement équivalente à la recherche de la meilleure approximation avec laquelle la fonction $f(\varphi)$ peut être représentée par une expression de la forme (2). C'est le problème même de Tchebycheff.

10. Tchebycheff a surtout considéré le cas de l'approximation d'une fonction continue par un polynome. Ses raisonnements ont été simplifiés et précisés par MM. Kircherberger et Borel ([1]). Le cas de l'approximation par des suites trigonométriques finies a été considéré par M. J.-W. Young ([2]) et par M. Fréchet ([3]). Mais il sera plus simple ici de prouver directement les quelques résultats qu'on utilisera.

Remarquons d'abord que l'on a

$$(4) \qquad f(\varphi + \pi) + f(\varphi) = D,$$

en supposant l'origine intérieure à Γ, ce que nous réaliserons toujours. Donc

$$\delta(\varphi, R, a, b) + \delta(\varphi + \pi, R, a, b) = D - 2R.$$

Si donc, quand φ varie, a, b, R étant fixes, $\delta(\varphi, R, a, b)$ atteint la limite supérieure m, il a pour limite inférieure $-n = D - 2R - m$. Et par suite en prenant $2R = D$, nous rendons aussi petit que possible le plus grand des deux nombres m et n. En d'autres termes, pour a, b fixes, c'est-à-dire le centre A d'un cercle A étant fixe, on obtient le minimum du maximum μ de $|\delta(\varphi, R, a, b)|$, c'est-à-dire la circonfé-

---

([1]) Voir l'exposition qu'en a donnée M. Borel dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles* et aussi la manière originale grâce à laquelle M. de la Vallée Poussin retrouve et complète les résultats de Tchebycheff (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1910, p. 809 et suiv.).

([2]) *Transactions of the American mathematical Society*, 1907.

([3]) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1908.

rence A différant le moins de Γ au sens précédemment indiqué, en prenant $R = \frac{D}{2}$ et alors $|\delta|$ varie entre $-\mu$ et $+\mu$. Résultat déjà obtenu et, en somme, par le même raisonnement.

Prenons ainsi R, et faisons varier a et b. Si l'un des deux, ou tous deux, augmentent indéfiniment en valeur absolue, μ augmente indéfiniment. Donc le minimum de μ, pour a, b variables, s'obtient pour des valeurs finies de a et b.

Cette valeur minimum de μ est positive, sans quoi $f(\varphi)$ serait de la forme (2) et Γ serait une circonférence, cas que l'on peut laisser de côté. Alors donc, pour les valeurs minimisantes de a et b, δ varie entre μ et $-\mu$ et l'on a

$$\delta(\varphi + \pi) + \delta(\varphi) = 0.$$

Soient deux valeurs, α et $\alpha + \pi$, de φ annulant δ. Dans $(\alpha, \alpha + \pi)$ δ atteint soit la valeur μ, soit la valeur $-\mu$, ceci est évident; je dis qu'en réalité, il atteint les deux. Supposons en effet que δ varie entre μ et $-m$, avec $m < \mu$, et modifions a et b de façon à remplacer $a\cos\varphi + b\sin\varphi$ par $a\cos\varphi + b\sin\varphi + \lambda\sin(\varphi - \alpha)$; δ deviendra

$$\delta - \lambda\sin(\varphi - \alpha) = \delta'$$

et δ' varie entre μ' et m' avec $\mu' < \mu$, $m < m' < \mu$, si λ est positif et assez petit. Ainsi μ n'aurait pas sa valeur minimum pour les valeurs considérées de a et b, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Traduisons le résultat en disant que, pour les valeurs minimisantes a et b, $\delta(\varphi)$ atteint ses valeurs extrêmes $+\mu$ et $-\mu$ dans tout intervalle $(\theta, \theta + \pi)$ d'étendue π.

La réciproque est vraie : si $\delta(\varphi)$ atteint ses valeurs extrêmes $+m$ et $-m$ dans tout intervalle $(\theta, \theta + \pi)$, pour tout autre système de valeurs de a et b, $|\delta(\varphi)|$ atteint des valeurs plus grandes que m. En effet, modifier a et b revient toujours à remplacer $\delta(\varphi)$ par une expression de la forme

$$\delta(\varphi) + \lambda\sin(\varphi - \alpha) = \delta'(\varphi),$$

et, puisque $\delta(\varphi)$ atteint $+m$ et $-m$ dans $(\alpha, \alpha + \pi)$, dans cet intervalle δ' atteindra des valeurs supérieures à m si λ est positif, des valeurs inférieures à $-m$ si λ est négatif.

Nous pouvons conclure : *Il existe toujours une circonférence* Λ *qui, dans la correspondance par tangentes parallèles dirigées, diffère moins que toute autre d'une orbiforme donnée* Γ. *La circonférence* C_Λ *concentrique à* Λ *est la plus petite de toutes celles qui enferment* Γ, *nous l'avons appelée la circonférence circonscrite; la circonférence* c_Λ *concentrique à* Λ *est la plus grande des circonférences intérieures à* Γ, *c'est la circonférence inscrite. Si l'on considère deux moitiés correspondantes de* C_Λ *et* c_Λ [c'est-à-dire données par les mêmes valeurs $(\alpha, \alpha+\pi)$ de φ], *il y a toujours sur chacune de ces demi-circonférences des points de* Γ.

11. Ces propositions correspondent exactement à celles des n^{os} **1** et **2**; elles sont un peu plus complètes, mais s'appliquent seulement aux orbiformes. Quant à la similitude des raisonnements, qui va souvent jusqu'à l'identité, il est inutile d'y insister davantage.

Soit l'équation d'une tangente en Λ à une orbiforme Γ

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0, \tag{1}$$

soit

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - q = 0, \tag{5}$$

l'équation de la normale correspondante. p et q sont des fonctions continues de φ (n° **6**). La tangente voisine est

$$x\cos(\varphi+\delta\varphi) + y\sin(\varphi+\delta\varphi) - p - \delta p = 0; \tag{6}$$

le point commun à (1) et (6) est aussi sur la droite

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - p\frac{1-\cos\delta\varphi}{\sin\delta\varphi} - \frac{\delta p}{\sin\delta\varphi} = 0. \tag{7}$$

Faisons tendre $\delta\varphi$ vers zéro, le point commun aux deux tangentes doit tendre vers Λ, c'est-à-dire vérifier (5), donc $\frac{\delta p}{\delta\varphi}$ tend vers q. Ainsi : *la fonction* $p = f(\varphi)$ *définissant une courbe orbiforme est continue et a une dérivée continue.*

Cette fonction doit vérifier la condition

$$f(\varphi+\pi) + f(\varphi) = D \tag{4}$$

et une autre condition qui exprimera la convexité de l'enveloppe de (1).

Les coordonnées du point A sont

$$x = p\cos\varphi - p'\sin\varphi, \qquad y = p\sin\varphi + p'\cos\varphi;$$

donc, le segment OA projeté sur la direction ψ donne

$$p\cos(\varphi - \psi) - p'\sin(\varphi - \psi),$$

et, pour la convexité, on doit avoir

$$(8) \qquad p(\psi) > p(\varphi)\cos(\psi - \varphi) + p'(\varphi)\sin(\psi - \varphi).$$

Pour la commodité, posons $D = 2r$, $p = h + r$ et représentons $h(\varphi)$ par une courbe L comme si h et φ étaient deux coordonnées cartésiennes rectangulaires. Supposons, de plus, que O est le centre du cercle circonscrit à Γ, alors h varie entre $+\mu$ et $-\mu$.

La condition (8) exprime alors que la courbe L est tout entière au-dessus de chaque sinusoïde de la forme

$$(8') \qquad h = A\sin\varphi + B\cos\varphi - r,$$

qui lui est tangente. Et, comme conséquence de (4) et (8), on voit que L est tout entière au-dessous de chaque sinusoïde de la forme

$$(8'') \qquad h = A\sin\varphi - B\cos\varphi - r,$$

qui lui est tangente [1].

Soient α un point où $h(\varphi) = 0$, β la plus petite valeur supérieure à α où $h(\varphi) = \pm\mu$ et supposons que $h(\beta) = +\mu$. L'arc de L correspondant à $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ est au-dessus de la sinusoïde (8′) qui lui est tangente au point $\varphi = \beta$, on a donc

$$h(\varphi) \geq (r + \mu)\cos(\varphi - \beta) - r.$$

d'où, en faisant $\varphi = \alpha$,

$$\cos(\beta - \alpha) \leq \frac{r}{r + \mu}.$$

Appelons $\cos\theta$ le second membre, θ étant aigu. On a $\beta - \alpha \geq \theta$.

---

[1] Ceci revient à dire que si l'on connaît un point A et une normale dirigée en A d'une orbiforme Γ de diamètre D, on en déduit le second pied B de la normale AB et Γ est située entre les tangentes en A et B et aussi entre les circonférences de rayon D et de centres A et B. Comparer avec le n° 6

Soit γ la plus petite valeur supérieure à β et telle que $\varphi(\gamma) = -\mu$. Quand on passe de β à γ, h passe de $+\mu$ à o, puis de o à $-\mu$; en utilisant comme on vient de le faire la sinusoïde (8′) et de façon analogue (8″), on trouve que $\gamma - \beta \geqq 2\theta$. Nous savons que γ est inférieur à $\alpha + \pi$. Je dis qu'entre γ et $\alpha + \pi$ il y a encore un point δ où $h(\delta) = +\mu$. Sans quoi en effet il n'y aurait pas de tel point entre $\gamma - \theta$ et $\gamma + \pi$ soit dans un intervalle d'étendue supérieur à π, ce qui est impossible. δ existe donc et l'on a

$$\delta - \gamma = 2\theta, \qquad \alpha + \pi - \delta = \theta;$$

d'où

$$\alpha + \pi - \alpha = 6\theta, \qquad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Donc

$$r = (r + \mu)\cos\frac{\pi}{6} = (r + \mu)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où pour le rayon $r + \mu$ du cercle circonscrit

$$r + \mu = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

Le plus grand cercle circonscrit est donc de rayon $\frac{D}{\sqrt{3}}$; mais cette valeur n'est atteinte que si toutes les inégalités précédentes se changent en égalité, auquel cas L est formée de sinusoïdes (8′) et (8″). Donc, en prenant $\alpha = 0$, on a

$$p(\varphi) = \frac{D}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right), \qquad \text{de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{3};$$

$$p(\varphi) = -\frac{D}{\sqrt{3}}\sin\varphi - D, \qquad \text{de } \frac{\pi}{3} \text{ à } \frac{2\pi}{3};$$

$$p(\varphi) = -\frac{D}{\sqrt{3}}\cos\left(\varphi - \frac{5\pi}{6}\right), \qquad \text{de } \frac{2\pi}{3} \text{ à } \pi;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

les valeurs non écrites de $p(\varphi)$ résultant de suite de la condition (4). Or on reconnaît la définition de $p(\varphi)$ pour l'orbiforme équilatérale. C'est donc pour elle et pour elle seule que le maximum du cercle circonscrit est atteint.

12. On pourrait traiter de même le cas des ensembles de l'espace, les modifications à apporter à ce qui précède sont banales. Seules les considérations du numéro précédent doivent subir des modifications assez notables. Mais je ne veux pas traiter à nouveau la question de la sphère circonscrite, je dis seulement quel sera ici le problème d'approximation de Tchebycheff.

L'équation (1) sera remplacée par

$$x\cos\varphi\sin\theta + y\sin\varphi\sin\theta + z\cos\theta - p = 0,$$

où p sera une fonction continue de θ, φ, à dérivées partielles du premier ordre continues. Et nous aurons à représenter au mieux cette fonction $p(\varphi, \theta)$ par une expression de la forme

$$R - [A\cos\varphi\sin\theta + B\sin\varphi\sin\theta + C\cos\theta].$$

Je signale encore la nouvelle forme que prendra la relation (4) : si l'on suppose que $p(\varphi, \theta)$ est définie pour $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ et quel que soit θ,

$$p(\varphi, \theta) + p(\varphi, \theta + \pi) = D.$$

Cette relation montre que le contour apparent en projection d'une surface orbiforme est une courbe orbiforme. De là il résulte que ce contour apparent en projection est de longueur indépendante de la direction des projetantes. Minkowski [1], dans un ingénieux petit Mémoire, a démontré la réciproque. C'est le seul travail que je connaisse sur les surfaces orbiformes. Au point de vue géométrique, celles de ces surfaces qui sont analytiques doivent mériter d'être étudiées. Leur surface des centres doit être bien curieuse; la correspondance qui existe entre leurs lignes de courbure doit aussi être l'origine de faits géométriques intéressants. J'ai dit que le problème du maximum du rayon de la sphère enveloppante se traitait comme le problème plan analogue; il y a cependant une différence à signaler:

Il existait une seule forme de courbe orbiforme donnant au rayon du cercle circonscrit sa valeur maximum; dans l'espace, il existe une infinité de surfaces orbiformes inégales donnant au rayon de la sphère circonscrite sa valeur maximum. En voici la raison, une courbe orbi-

---

[1] *Œuvres*, t. II, p. 277.

forme de diamètre D est entièrement déterminée quand on l'assujettit à passer par les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté D; au contraire, une surface orbiforme de diamètre D n'est pas définie par la seule condition de passer par les sommets d'un tétraèdre régulier d'arête D.

13. Nous avons déjà remarqué que toutes les orbiformes de même largeur D ont la même longueur. Comme parmi ces orbiformes se trouve la circonférence de diamètre D, elles ont toutes une longueur égale à πD. Du théorème des isopérimètres, il résulte alors que la circonférence de diamètre D est, de toutes les orbiformes de même largeur, celle qui a la plus grande aire, $\frac{\pi D^2}{4}$; cette remarque conduit naturellement à rechercher quelle est l'orbiforme de largeur D qui a la plus petite aire.

Pour traiter ce problème, j'emploierai ici une méthode purement géométrique qui nous permettra de démontrer à nouveau que toutes les orbiformes D ont même longueur que celle de ces orbiformes qui est circulaire et qu'elles ont une aire plus petite qu'elle.

Soient $\alpha_1 = 0$, α_2, α_3, ... un ensemble dénombrable de nombres, positifs et inférieurs à π, partout dense dans $(0, \pi)$; je pose $\alpha'_i = \alpha_i + \pi$. A chaque entier i, j'attache les deux tangentes T_i, T'_i, de directions α_i et α'_i, d'une orbiforme donnée. Cette orbiforme sera parfaitement déterminée par la connaissance de cette infinité dénombrable de tangentes; sa longueur et son aire peuvent être considérées comme des fonctions des nombres α_i. Les problèmes de Calcul des Variations relatifs aux orbiformes peuvent ainsi être considérés comme des questions de minimum pour des fonctions des variables α_i. Cette transformation banale est ici avantageuse.

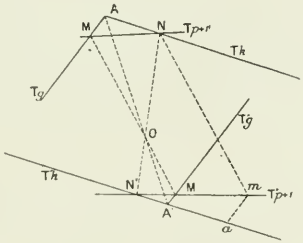
Nous allons, pour une orbiforme quelconque, calculer L et S comme limites des nombres analogues relatifs au polygone circonscrit H_p formé par les tangentes T_1, T'_1, T_2, T'_2, ..., T_p, T'_p. On passe de H_p à H_{p+1} en enlevant de H_p deux triangles; pour préciser, supposons que α_{p+1} soit compris entre les deux nombres α_g et α_k de la suite α_1, α_2, ..., α_n, α_1.

Les tangentes T_g et T'_g, distantes de la largeur D de l'orbiforme, et les deux tangentes T_k et T'_k, distantes aussi de D, forment un losange

dont les points A et A′ de rencontre de T_g et T_k, de T'_g et T'_k sont deux sommets opposés. De sorte que AA′ est la bissectrice de T_g et de T_k, de T'_g et de T'_k dont la direction est $\left(\frac{\alpha_g + \alpha_k}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Si T_{p+1} rencontre T_g en M et T_k en N et si, de même, T'_{p+1} rencontre T'_g et T'_k en M′ et N′, MM′ et NN′ sont les bissectrices extérieures des angles AMN, A′M′N′; ANM, A′N′M′. Les deux triangles AMN, A′M′N′ sont donc homothétiques, le centre d'homothétie étant le centre à la fois du cercle exinscrit dans AMN, suivant le côté MN, et du cercle analogue relatif à A′M′N′.

Fig. 3.



La longueur MN + M′N′ est la base N′m d'un triangle semblable à la fois à OMN et à OM′N′ et dont la hauteur est la somme D des hauteurs de ces triangles. MN + M′N′ a donc une valeur que l'on peut calculer dès que l'on connaît α_g, α_{p+1}, α_k et qui est indépendante de celle des orbiformes de largeur D que l'on considère.

De même AM + A′M′ et AN + A′N′ ont des valeurs connues, celles des longueurs des côtés am, aN′ d'un triangle θ_p semblable à AMN et de base MN + MN′. Donc, quand on passe de Π_p à Π_{p+1}, on diminue le périmètre du polygone circonscrit d'une longueur bien déterminée $D\varepsilon_p$.

La longueur de Π_p est donc égale à

$$\text{longueur de } \Pi_2 - D(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{p-1});$$

elle est donc la même pour toutes les orbiformes de largeur D et, par suite, celles-ci ont toutes même longueur; résultat déjà connu.

14. Évaluons de même la différence entre les aires de Π_{p+1} et Π_p; c'est-à-dire la somme des aires des triangles AMN, A'M'N'. Cette somme est égale à l'aire du triangle θ_p déjà considéré, semblable à AMN et de base MN + M'N', multipliée par $\lambda_p^2 + (1 - \lambda_p)^2$ si λ_p est le rapport $\frac{MN}{MN + M'N'}$.

Le triangle θ_p est indépendant de l'orbiforme considérée; c'est-à-dire de la forme particulière du polygone Π_p; il en est de même de son aire. La seule quantité qui varie d'une orbiforme à l'autre c'est la grandeur de la quantité λ_p qui peut varier de 0 à 1. Or, le multiplicateur $[\lambda_p^2 + (1 - \lambda_p)^2]$ est minimum pour $\lambda_p = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire MN = M'N', et maximum pour $\lambda_p = 0$, ou 1, c'est-à-dire MN ou M'N', égal à zéro. Les deux limites entre lesquelles peut varier l'aire de Π_p sont donc, en désignant par η_p l'aire de θ_p,

$$\text{aire de } \Pi_2 = \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_{p-1})$$

et

$$\text{aire de } \Pi_2 = (\eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_{p-1}).$$

Et puisque l'aire de l'orbiforme est la limite de l'aire de Π_p, les maximum et minimum de cette aire seront

$$\text{aire de } \Pi_2 = \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3 + \ldots)$$

et

$$\text{aire de } \Pi_2 = (\eta_2 + \eta_3 + \ldots);$$

du moins s'il existe bien des orbiformes pour lesquelles ces limites sont atteintes.

Le maximum est atteint pour une orbiforme telle que l'on ait constamment MN = M'N'; alors les deux triangles AMN, A'M'N' sont égaux et les deux circonférences de centre O exinscrites respectivement dans AMN et A'M'N' étant de même rayon, sont confondues. Le point O est donc également distant de T_g, T'_g, T_k, T'_k, T_{p+1}, T'_{p+1}; par suite, en raisonnant de proche en proche, on voit qu'il existe un point O également distant de toutes les tangentes à l'orbiforme qui est donc une circonférence. Résultat connu.

13. Le minimum indiqué serait atteint si l'on avait constamment $MN = 0$ ou $M'N' = 0$: on va voir que cela est impossible, en général, de sorte que le véritable minimum est plus petit que celui que nous avions trouvé plus haut. Ceci peut paraître en contradiction avec les dernières lignes de ma Note des *Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France*, 1914, p. 76. Aussi je vais développer ici le raisonnement indiqué en quelques mots seulement dans la Note citée.

Sans précautions particulières, on ne peut pas avoir constamment $MN.M'N' = 0$; supposons en effet que H_2 soit un carré ABCD: T_3 ou T'_3 devrait passer par un sommet de H_2; par A, par exemple. Alors A appartiendrait certainement à l'orbiforme, AB et AD seraient donc deux normales à la courbe; B et D seraient deux points de l'orbiforme, ce qui est impossible, car $BD = D\sqrt{2}$.

Mais nous allons voir qu'en choisissant convenablement les orientations α_1, α_2, il est possible que la condition $MN.M'N' = 0$ soit réalisée à partir du passage de H_2 à H_3.

Prenons $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$; H_2 est un losange formé par deux triangles équilatéraux accolés par leur base. L'aire de H_2 est la même pour toutes les orbiformes.

Prenons $\alpha_3 = \frac{2\pi}{3}$; si la condition $MN.M'N' = 0$ est remplie, l'une des tangentes T_3 ou T'_3 passera par l'un des sommets de H_2 en lequel l'angle de H_2 est $\frac{2\pi}{3}$. Soit A ce sommet, soit ABCD le losange. Alors A fait partie de l'orbiforme, donc les perpendiculaires en A à AB et AD sont deux normales et leurs points de rencontre, respectivement avec CD et BC sont deux autres points β et γ de l'orbiforme. Mais $A\beta\gamma$ est équilatéral ; l'orbiforme est donc l'orbiforme équilatérale. C'est par celle-ci, et par celle-ci seule, que le minimum est atteint.

Ainsi *l'orbiforme d'aire minimum est l'orbiforme équilatérale: son aire est* $D^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ [1].

---

[1] Le calcul effectif des ε et η fournit des identités intéressantes, mais qui ne diffèrent pas de celles que donnent les calculs classiques de π.

16. Présenté sous la forme précédente, l'artifice paraît très spécial et basé entièrement sur le fait que toute normale à une orbiforme est une normale double. On peut lui donner une forme qui le rend utilisable dans des cas assez variés.

Supposons que nous ayons à chercher le minimum d'une fonction de contour $F(c)$, qui conserve la même valeur pour deux contours homothétiques et dont le minimum ne puisse être atteint que par un contour convexe. Il sera alors tout naturel de déterminer ces contours par leurs tangentes de directions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, les α_p étant des nombres donnés partout denses dans $(0, 2\pi)$. Les p premières tangentes forment un polygone H_p; le passage à H_{p+1} fera passer la fonction de $F(H_p)$ à $F(H_{p+1})$ et, grâce à la condition d'homothétie, il arrivera souvent que le gain, $F(H_p) - F(H_{p+1})$, le meilleur qui puisse se réaliser, soit indépendant de H_p; on déterminera donc alors facilement les tangentes successives, donc le contour minimisant.

Pour retrouver ce que nous avons fait précédemment, il suffit de rechercher, pour les orbiformes, le maximum et le minimum du quotient $\frac{L^2}{S}$, du carré de la longueur à la surface; dans ce cas, pour tenir compte de la définition de l'orbiforme, on déterminera toujours simultanément les tangentes de directions α_p et $\alpha_p + \pi$.

J'ai montré, dans la Note citée, qu'ainsi présenté, l'artifice réussit très bien pour le problème des isopérimètres, problème qu'il faut ici énoncer comme étant encore la recherche du minimum de $\frac{L^2}{S}$; mais cette fois pour toutes les courbes possibles.

On voit, qu'en somme, on trouve avantage à ne pas raisonner sur une intégrale, comme on le fait ordinairement dans le calcul des variations, mais à raisonner sur une expression construite à l'aide de plusieurs intégrales.

Sur la recherche des points singuliers de certaines fonctions définies par leur développement de Taylor;

PAR J. SOULA.

INTRODUCTION.

1. Les problèmes abordés dans le présent travail peuvent être classés en deux catégories :

A. Je me donne deux séries de Taylor dont les rayons de convergence ne sont ni nuls, ni infinis :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Elles définissent deux fonctions analytiques. Je désignerai, dans tout ce qui suit, la série $\Sigma a_n b_n x^n$ par $H[\varphi(x), k(x)]$ ou par $H[\varphi, k]$, et ce symbole représentera aussi la fonction analytique correspondante. D'après un théorème de M. Hadamard, tout point singulier α de $H[\varphi, k]$ est égal au produit $\beta\gamma$ d'un point singulier β de $\varphi(x)$ par un point singulier γ de $k(x)$. M. Borel [1], puis M. Faber [2] se sont demandé dans quels cas on peut affirmer qu'un produit $\beta\gamma$ est bien singulier pour $H[\varphi, k]$. En fait, $\beta\gamma$ peut être un point régulier de

[1] BOREL, *Sur les singularités des séries de Taylor* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XXVI, p. 238).

[2] FABER, *Jahresberichte der deutsche mathematiker Vereinigung*, 1907, Bd XVI.

$H[\varphi, k]$ et la disparition de cette singularité se produit souvent quand il existe un autre point singulier β' de $\varphi(x)$ et un autre point singulier γ' de $k(x)$ tels que $\beta\gamma = \beta'\gamma'$, ce que nous exprimerons en disant *que $\beta\gamma$ peut être obtenu plusieurs fois*. Il peut arriver que $\beta\gamma$ soit point régulier de $H[\varphi, k]$ sans que $\beta\gamma$ soit obtenu plusieurs fois. On verra de nombreux exemples de ce fait dans ce qui suit; je signale dès maintenant le suivant :

Je pose

$$\varphi(x) = \sum \cos\frac{\pi\sqrt{n}}{2} x^n.$$

On sait que $\cos\frac{\pi\sqrt{n}}{2}$ est une fonction entière de n, de genre inférieur à 1. Il en résulte, d'après un théorème de M. Leau, que $\varphi(x)$ n'a pas d'autre point singulier que le point 1, qui est d'ailleurs point essentiel. Je prends ensuite

$$k(x) = \sum_{p=0}^{\infty} x^{(2p+1)^2},$$

série présentant un grand nombre de lacunes et qui, d'après un théorème de M. Fabry, admet son cercle de convergence comme coupure. β étant égal à 1, γ étant un point quelconque de module 1, la singularité $\beta\gamma$ disparaît, bien que $\beta\gamma$ ne puisse être obtenu qu'une fois, $\varphi(x)$ n'ayant qu'un point singulier : on a en effet $H[\varphi, k] = 0$.

Pour étudier de telles disparitions de singularités, nous aurons à faire usage de l'une des remarques essentielles de M. Borel. Supposons que $\varphi(x)$ admette un point singulier isolé et *séparable*. J'entendrai par là, dans tout ce qui suit, que l'on peut écrire

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \Phi(x),$$

$\varphi_1(x)$ n'ayant pas d'autre singularité que β à distance finie, $\Phi(x)$ étant régulière en β. Soit γ_1 un point singulier de la fonction $k(x)$, si $\beta\gamma$ ne peut être obtenu qu'une fois, l'allure de la fonction $H[\varphi, k]$ en $\beta\gamma$ ne dépend que de la partie irrégulière $\varphi_1(x)$, elle est la même que celle de $H[\varphi_1, k]$. M. Borel signale ensuite des catégories de points singuliers β, les pôles entre autres, pour lesquels $H[\varphi, k]$ est toujours irrégulière en $\beta\gamma$, si $\beta\gamma$ ne peut être obtenu qu'une fois, et

cela, quelle que soit la fonction $k(x)$, irrégulière en γ. J'ai été ainsi conduit à me poser les questions suivantes :

1° A quelles conditions un point singulier β de $\varphi(x)$ est-il tel que $H[\varphi, k]$ admette le point singulier $\beta\gamma$ toutes les fois que $k(x)$ est singulière en γ et que $\beta\gamma$ ne peut être obtenu qu'une seule fois? Si β possède cette propriété, je dirai que c'est un *point singulier principal* de $\varphi(x)$. Un pôle est un point singulier principal, le fait, pour un point singulier séparable, d'être ou de n'être pas principal, ne dépend que de la partie irrégulière. Je serai ainsi conduit à traiter d'abord le cas où $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier.

2° Je considère la fonction $\varphi(x)$, admettant, entre autres points singuliers, un point singulier β. Est-il possible que $H[\varphi, k]$ admette toujours le point singulier $\beta\gamma$, quand $k(x)$ est singulière en γ et cela même si $\beta\gamma$ peut être obtenu plusieurs fois? Si β possède cette propriété, je dirai que c'est un *point singulier principal absolu*.

B. Je me donne la fonction $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ et une fonction $g(u)$, définie pour $u = a_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, qui sera, en général, holomorphe pour ces valeurs de la variable. Je cherche les points singuliers de $F(x) = \Sigma g(a_n) x^n$ en supposant connus ceux de $\varphi(x)$.

Ce problème a été traité dans des cas particuliers importants et les résultats obtenus sont bien connus : je ne puis que renvoyer à l'Ouvrage de M. Hadamard : *La série de Taylor et son prolongement analytique* (1). Je citerai les théorèmes de M. Leau (2) : si $a_n = \frac{1}{n}$ et si l'on prend $g(u)$ holomorphe pour $u = 0$, $F(x)$ n'a que le point singulier 1 ; si $a_n = n$ et si $g(u)$ est fonction entière d'ordre inférieur à 1 ou égal à 1 par excès, $F(x)$ n'a que le point singulier 1, qui est essentiel. Ces théorèmes ont été démontrés à nouveau, notamment par MM. Le Roy et Faber (3). M. Leau traite encore le cas où $g(u)$

(1) *Collection Scientia*. Gauthier-Villars.

(2) Leau, *Recherches sur les singularités d'une fonction définie par une série de Taylor* (*Journal de Liouville*, t. V, 1899).

(3) Le Roy, *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. II, 1900, p. 341 et 349). — Faber, *Mathematische Annalen*, 1903, Bd LVII.

est une fonction entière et où $\varphi(x)$ vérifie certaines conditions. Les résultats les plus simples sont ceux où $\varphi(x)$ n'a que le point singulier 1 et où il existe un nombre positif q tel que $|1-x|^q|\varphi(x)|$ soit borné au voisinage du point 1, ce que j'exprimerai en disant que ce *point singulier est d'ordre fini et que son ordre est* q. $F(x)$ n'a encore que le point singulier 1 si $q<1$; ou bien, si $q>1$ et si l'ordre de la fonction entière $g(u)$ est inférieur à $\frac{1}{1-q}$.

M. Fabry (¹) a traité le problème quand $a_n=n$ et quand $g(u)$ est holomorphe dans un angle qui admet la partie positive de l'axe réel pour bissectrice et telle, de plus, que $\frac{1}{|u|}L|g(u)|$ devienne inférieur à tout nombre positif donné dès que $|u|$ dépasse un nombre convenable. Nous exprimerons ce fait, dans la suite, en disant que $\frac{1}{|u|}L|g(u)|$ a uniformément zéro pour plus grande des limites dans cet angle. M. Fabry a montré que $F(x)$, n'a, dans ce cas, pas d'autre point singulier que 1 sur son cercle de convergence. M. Le Roy (²) a traité le même problème dans un cas particulier. MM. Mellin et Lindelöf (³) ont étudié la même question que M. Le Roy et des questions analogues.

2. Les méthodes que j'emploierai présentent quelques analogies avec celles que M. Volterra a créées pour étudier ce qu'il appelle la composition de première et deuxième espèces (⁴). Je considère $H[\varphi, k]$ comme transformée de $k(x)$ par une opération distributive par rapport à l'addition. Il y a lieu d'étudier l'effet de plusieurs opérations successives et l'on voit que, transformer p fois $k(x)$ revient à effectuer l'opération $H[\varphi_p(x), k(x)]$ en posant $\varphi_p(x)=\Sigma a_n^p x^n$.

(¹) Fabry, *Sur les points singuliers d'une série de Taylor* (*Journal de Liouville*, t. IV, 5e série, 1898).

(²) Le Roy, Mémoire cité.

(³) Lindelöf, *Leçons sur le calcul des résidus* (*Collection Borel*, p. 108 et suiv.).

(⁴) *Voir*, par exemple, Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes* (*Collection Borel*).

Il faut étudier aussi l'opération inverse de la précédente, c'est-à-dire celle qui s'obtient en remplaçant $\varphi(x)$ par $\varphi_{-1}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n}$.

On a pu construire des théories générales des opérations distributives [1]. Toute théorie de la transformation T qui remplace F par T(F) demande l'étude préalable de la transformation qui remplace F par

$$\lambda T(F) + \lambda^2 T^2(F) + \ldots + \lambda^p T^p(F) + \ldots,$$

T^p étant le résultat de p transformations T. Cette étude préalable a fait, par exemple, l'objet des théorèmes de M. Fredholm dans le cas de la permutabilité de deuxième espèce. On passe ensuite de la transformation précédente à la transformation qui remplace F par [2]

$$\mathfrak{T}(F) = C_1 \lambda T(F) + C_2 \lambda^2 T(F) + C_3 \lambda^3 T(F) + \ldots$$

et qui fait correspondre $\mathfrak{T}(F)$ à la fonction analytique

$$g(\lambda) = C_1 \lambda + C_2 \lambda^2 + C^3 \lambda_2 + \ldots.$$

Nous verrons, de même, qu'il est possible de déduire l'étude de la fonction

$$R(x, \lambda) = C_1 \lambda \varphi(x) + C_2 \lambda_2 \varphi^2(x) + \ldots + C_p \lambda^p \varphi_p(x) + \ldots$$

de celle de

$$Q(x, \lambda) = \lambda \varphi(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \ldots + \lambda^p \varphi_p(x) + \ldots.$$

Or, la deuxième est formellement égale à $-\lambda \sum \frac{x^n}{\lambda - \frac{1}{a_n}}$ et la première à $\sum g(\lambda a_n) x^n$, ce qui permet de prévoir que le problème B, dans le cas où $g(u)$ est fonction analytique de u, se ramène au problème B particulier où $g(u) = \frac{-\lambda}{\lambda - \frac{1}{u}}$. Il faudra donc faire l'étude de $Q(x, \lambda)$ et nous n'y parviendrons que pour des fonctions $\varphi(x)$ particulières.

---

(1) *Voir* Pincherle, *Atti della R. Accademia dei Lincei*, 3 novembre 1912.

(2) *Voir* Volterra, Ouvrage cité, et Lebesgue, *Sur un théorème de M. Volterra* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 40, 1912).

Je n'emploierai pas d'ailleurs, explicitement, la méthode de MM. Volterra et Lebesgue, mais une méthode équivalente indiquée par M. Borel [1], dans un cas particulier. Pour justifier le calcul formel qui précède, plusieurs méthodes peuvent être employées : je m'appuierai toujours sur la méthode due à M. Montel [2]. Quelle que soit la méthode employée, il importe toujours de commencer par la recherche d'une borne de $Q(x, \lambda)$ quand x et λ varient dans certaines conditions.

5. Les problèmes A et B sont liés l'un à l'autre au point qu'il est préférable de ne pas les étudier séparément. On verra que la condition nécessaire et suffisante pour que le point singulier, supposé unique, de la fonction $\varphi(x)$ soit principal, est que la fonction $\varphi_{-1}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n}$ n'admette qu'un point singulier, ce qui ramène le problème A à un problème B. Mais, d'autre part, la nature de la fonction $Q(x, \lambda)$, considérée comme fonction de x, dépend de la question de savoir si les points singuliers de $\varphi(x)$ sont ou ne sont pas principaux. J'ai été ainsi conduit à m'occuper alternativement des deux problèmes.

Dans la première Partie, je reprends l'étude des théorèmes de MM. Leau et Fabry. Je généralise un des théorèmes de M. Leau en traitant le cas où $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier d'ordre q inférieur à 1 et où $g(u)$ est non plus entière, mais holomorphe à l'origine. Je reprends ensuite la démonstration du théorème de M. Fabry relatif aux fonctions de la forme $\sum g(n)x^n$; la même méthode permet de traiter des cas particuliers, celui de M. Le Roy, entre autres.

La deuxième Partie est consacrée au problème A. J'y donne des conditions pour qu'un point singulier soit ou ne soit pas principal et des exemples de points principaux et de points qui ne le sont pas.

La troisième Partie utilise les résultats de la deuxième pour l'étude du problème B en ne supposant plus que la fonction $\varphi(x)$ n'a qu'un seul point singulier, mais en adoptant des hypothèses plus générales.

---

(1) Borel, *Sur la recherche des points singuliers des series de Taylor* (*C. R. Acad. Sc.*, 12 décembre 1898).

(2) Montel, *Leçons sur les séries de polynomes*, p. 27-28.

J'ai reçu de nombreux encouragements de MM. Borel, Fabry, Hadamard et Vessiot; je dois surtout beaucoup à M. Montel qui m'a aidé de ses conseils avec une inlassable bienveillance. Je tiens à leur exprimer à tous ma vive reconnaissance.

PREMIÈRE PARTIE.

4. *Généralisation d'un théorème de M. Leau.* — J'aurai besoin de traiter le problème suivant : *Deux points x et z parcourent d'une manière indépendante un contour fermé; étudier le domaine formé par les points $t = \frac{x}{z}$.*

Je suppose d'abord que le contour est une courbe simple C, entourant l'origine, convexe, et même (il n'y a pas d'inconvénient à particulariser ainsi le problème) que cette courbe est une ellipse C ayant son foyer à l'origine O. Je désigne son excentricité par e, et le domaine cherché, par D. Je pose $t = re^{i\varphi}$; on voit que le module r est donné par

$$r = \frac{1 + e\cos\varphi}{1 + e\cos(\omega + \varphi)},$$

où l'argument φ et le paramètre ω peuvent prendre toutes les valeurs. φ étant donné, r vérifie, si t fait partie de D,

$$r^2(1 - e^2) - 2r(1 - e^2\cos\varphi) + 1 - e^2 = 0,$$

de sorte que le domaine D comprend deux courbes Γ_1 et Γ_2, entourant l'origine et la région située entre ces deux courbes. Γ_1 et Γ_2 appartiennent à une même courbe algébrique d'équation

$$r^2(1 - e^2) - 2r(1 - e^2\cos\varphi) + 1 - e^2 = 0;$$

elles se coupent au point 1 qui est point double de la courbe algébrique. Les tangentes au point 1, symétriques par rapport à l'axe réel, font avec lui des angles dont la tangente est $\sqrt{\frac{1 - e^2}{e^2}}$. Un tel angle

peut être rendu arbitrairement petit. il suffit de prendre e assez voisin de 1.

N'importe quel point du plan peut appartenir à D, s'il ne se trouve pas sur l'axe réel, il suffit que l'excentricité soit assez grande. En exprimant que le point $re^{i\varphi}$ appartient à D, j'ai, en effet,

$$e^2 \geqq \frac{(r-1)^2}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1}.$$

Or,

$$\frac{(r-1)^2}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} < 1.$$

Tous les points du cercle $r = 1$ appartiennent à D; la courbe Γ_1 est intérieure, la courbe Γ_2 extérieure à ce cercle, car le produit des valeurs de r correspondant à une valeur de φ est égal à 1.

La demi-droite L qui est située sur l'axe réel, du côté positif, qui part du point 1, n'a en commun avec D que le point 1.

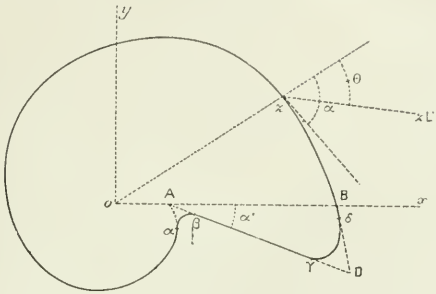
Je vais traiter maintenant la même question en remplaçant le contour C par un autre contour C′ défini de la façon suivante. Je trace un arc de spirale logarithmique d'équation $\rho = ae^{-m\omega}$ (a et m positifs), et je marque les points $A(\omega = 0, \rho = a)$ et $B(\omega = -2\pi, \rho = ae^{2m\pi})$. Les tangentes à cette courbe font, avec les rayons vecteurs aux points de contact, un angle V tel que $\operatorname{tang} V = -\frac{1}{m}$. Je désigne par α l'angle aigu et positif tel que $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{m}$; j'ai $V = -\alpha$. Je trace ensuite une droite AD, au-dessous de l'axe réel Ox, faisant avec lui un angle aigu dont la valeur absolue est α', tel que $0 < \alpha' < \alpha < \frac{\pi}{2}$. AD coupe l'arc de spirale en D voisin de B.

Je raccorde la droite AD et l'arc de spirale en traçant deux petits arcs de cercle $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ tangents à ces deux lignes; α est pris très voisin de A, et δ très voisin de D, sur l'arc de spirale AD. Le contour C′ sera formé de l'arc de spirale $\delta\alpha$, du segment de droite $\beta\gamma$, et des deux raccords $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$. Cherchons le domaine D′ occupé par le point $t = \frac{x}{z}$ quand x et z parcourent C′.

On voit d'abord que D′ est borné, ne contient pas l'origine, et se transforme en lui-même si l'on remplace un de ses points t par $\frac{1}{t}$.

Il est facile de voir que D′ a des points sur tous les rayons vecteurs issus de l'origine O. Pour trouver les points sur le rayon d'argument φ, il suffit de faire pivoter un angle égal à φ autour de O. Un de

Fig. 1.

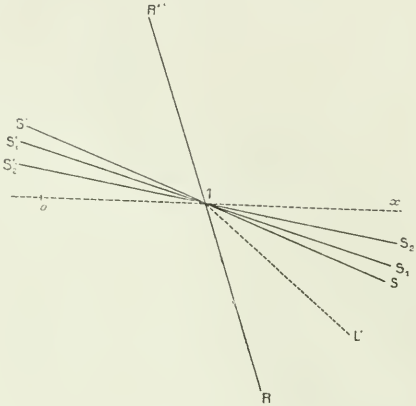


ses côtés coupe C′ en x, l'autre en z, et l'argument de $\frac{x}{z}$ est φ. $\left|\frac{x}{z}\right|$ ne garde pas la même valeur quand l'angle tourne, de sorte qu'il y a plusieurs points sur chaque rayon issu de O; le domaine D′ est une sorte de couronne entourant l'origine.

Pour l'étudier d'une façon plus précise, nous considérerons D′ comme engendré par une courbe C'_z, qui est elle-même le lieu du point $\frac{x}{z} = t$ quand z reste fixe et quand x parcourt C′. Cette courbe est semblable à C′ et passe par le point $t = 1$. Elle fait en $t = 1$, avec l'axe réel, un angle égal à l'angle de C′ avec le rayon vecteur Oz du point z. Cherchons, d'après cela, la forme de D′ au voisinage du point 1. Il suffit de chercher l'angle que fait, avec l'axe réel, la tangente T_z à la courbe C'_z au point 1 et de suivre ses variations quand z parcourt C′ (voir *fig.* 2). Je trace, au point 1, les droites RR′ et SS′, dont les directions au-dessous de Ox font avec lui les angles aigus α et α'. Si z parcourt l'arc $\delta\alpha$ de la spirale, la tangente T_z reste sur RR′. Si z parcourt l'arc $\alpha\beta$, on voit que T_z balaye un angle RS'_1 (et son opposé $R'S_1$), $S_1S'_1$ est la position de T_z pour z en β; elle est aussi voisine de S′S qu'on le veut, si l'on considère le raccord β comme infiniment petit.

Quand z parcourt le segment de droite $\beta\gamma$, l'angle aigu de T_z avec Ox diminue et T_z balaye les angles opposés S_1S_2 et $S'_1S'_2$, $S_2S'_2$ étant la position de T_z qui correspond à γ. Si, enfin, z est sur le raccord $\gamma\delta$, T_z balaye les angles S_2R' et S'_2R. Finalement, T_z n'est

Fig. 2.



jamais dans l'angle RS (ou R'S') et elle peut être aussi voisine qu'on le veut des deux côtés de cet angle, si le raccord $\alpha\beta$ est assez petit. T_z occupe toute autre position à l'intérieur des angles RS'_1, $R'S_1$. Au voisinage de 1, D' a des points infiniment voisins de 1 sur tout rayon dans l'angle RS'_1 et n'en a aucun sur un rayon de l'angle RS. D' présente donc une sorte de pointe. Ajoutons que D' est évidemment une aire bornée par une frontière qui est une courbe formée d'arcs analytiques.

Je dis maintenant que l'angle RS (au-dessous de Ox), est entièrement extérieur à D'. Je trace une droite L' située dans cet angle. Elle fait avec Ox un angle aigu dont la valeur absolue θ vérifie $0 < \alpha' < \theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Si cette demi-droite rencontrait D' en un point t autre que 1, on aurait $x = tz$, x et z étant deux points distincts de C'. La demi-droite zL' déduite de L', en multipliant l'affixe de chaque point par z, rencontrerait C' en un point x autre que z. On peut

tracer zL' pour chaque point z de C', elle part de z et fait avec le rayon vecteur un angle égal à $-\theta$. Si z est sur l'arc de spirale, zL' est extérieur à C', puisque la tangente fait, avec le rayon vecteur, un angle négatif $-\alpha$ et que l'on a $\alpha > \theta$. Si z décrit C' en entraînant zL' avec lui, zL' ne se confondra jamais avec une tangente, qui ne fait jamais l'angle θ avec le rayon vecteur. zL' est donc toujours dirigé vers l'extérieur de C'. Il reste à savoir si cette droite ne va pas ensuite couper le contour C' en des points éloignés de z. L'étude de la figure montrera aisément qu'il n'en est rien. *La demi-droite* L' *est donc extérieure à* D' *pour* $\alpha' < \theta < \alpha$ *et et n'a avec* D' *aucun point commun autre que* 1.

Par contre, D' *contient un segment mn de l'axe réel* et 1 est situé sur ce segment entre m et n. Il n'y a qu'à remarquer qu'on peut prendre sur C' deux points x et z de même argument. On peut choisir z voisin de A et x voisin de B. Alors $\frac{x}{z}$ est voisin de $e^{2\pi m}$ et, en prenant le raccord assez petit, cette quantité est aussi voisine de $e^{2\pi m}$ qu'on le veut. *Le segment mn peut donc englober tout point de l'axe réel*, il n'y a qu'à prendre m assez grand (et, par suite, α et α' assez petits).

Est-il possible de tracer un chemin entièrement intérieur à D', joignant un point de module inférieur à 1, à un point de la ligne L? On peut répondre affirmativement, puisqu'il y a des contours C_z' qui coupent L et qui ont des points intérieurs au cercle de rayon 1, il suffit de prendre z sur $\beta\gamma$ pour s'en rendre compte. C_z' possède alors deux points réels d'argument zéro et dont les modules sont l'un supérieur, l'autre inférieur à 1. Mais il est à remarquer que ces chemins ne coupent pas les lignes L' et sont, par suite, situés au-dessus de Ox, au voisinage de L. Ils ne permettent d'aborder L que du côté supérieur.

On peut considérer le contour C'' symétrique de C' par rapport à Ox. Il donne lieu à un domaine D'' possédant des propriétés analogues à celles de D'. Je signalerai que l'on peut tracer des chemins situés dans D'' allant de points intérieurs au cercle $|z| = 1$ jusqu'à des points de L et abordant L du côté inférieur.

Je remarquerai enfin que l'on peut *associer un contour* C *et un contour* C' *de façon que le domaine formé par la réunion de* D *et* D' *recouvre entièrement un cercle assez petit de centre* 1. Il suffit que l'angle RS_1 soit intérieur à l'angle des tangentes aux courbes Γ_1

et Γ_2 et pour cela que l'ellipse C soit assez excentrique. On peut donc se donner C', C existe tel que la condition précédente soit vérifiée.

3. Je considère deux séries

$$\varphi(x) = \Sigma a_n x^n \qquad \text{et} \qquad f(x) = \Sigma b_n x^n$$

qui définissent deux fonctions analytiques $\varphi(x)$ et $f(x)$. Je suppose qu'elles sont holomorphes dans tout domaine fini comprenant l'origine et n'ayant aucun point commun avec la demi-droite L et aussi dans tout domaine fini n'ayant aucun point commun avec une demi-droite L' située, par exemple, au-dessous de l'axe réel, qui fait avec lui un angle θ aigu quelconque et qui part du point 1. C'est ce qu'on peut exprimer en disant que ces fonctions n'ont à distance finie pas d'autre point singulier que 1, quand on n'effectue que des prolongements analytiques qui ne font le tour d'aucun point singulier.

J'admets de plus que l'on a au voisinage de $x = 1$, et pour toute valeur de x située dans un des domaines qui viennent d'être précisés,

$$|\varphi(x)| < \frac{A}{|x-1|^q}, \qquad |f(x)| < \frac{B}{|x-1|^{q'}},$$

A et B étant des constantes positives; q et q' des nombres positifs inférieurs à 1. On pourra dire que $\varphi(x)$ admet 1 comme point singulier d'ordre q. Je vais étudier l'intégrale

$$J(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \varphi\left(\frac{x}{z}\right) f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dz}{z},$$

prise sur le contour C dont il vient d'être question, x et y étant deux points de C. Comme $\frac{x}{z}$ et $\frac{z}{y}$ appartiennent au domaine D, qui n'a pas de point autre que 1 commun avec la ligne L, comme les fonctions $\varphi(t)$ et $f(t)$ sont uniformes dans D, l'élément différentiel est bien défini sans ambiguïté et c'est une fonction holomorphe de z sauf pour $z = x$, $z = y$.

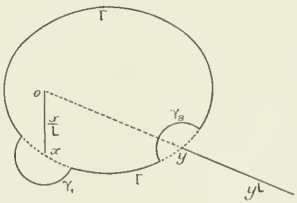
Je suppose x différent de y. L'élément différentiel devient infini comme $\frac{1}{|z-x|^q}$ et $\frac{1}{|z-y|^{q'}}$. On peut montrer que, comme pour des variables réelles, l'intégrale peut être définie sans difficulté. Dans ce but, je trace deux petits cercles de centres respectifs x et y, de rayons

ρ et ρ' assez petits pour qu'ils ne se coupent pas entre eux, pour qu'ils coupent C en deux points seulement, pour qu'ils laissent l'origine à l'extérieur. Je désigne par Γ la partie de C qui est extérieure à ces cercles, par γ_1 la partie du cercle de centre x qui est extérieure à l'ellipse, par γ_2 la partie du cercle de centre y intérieure à C. L'intégrale

$$J'(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma+\gamma_1+\gamma_2} \varphi\left(\frac{x}{z}\right) f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dz}{z}$$

représente le prolongement en x de la série $\sum \frac{a_n b_n}{y^n} x^n$, cela résulte de la démonstration du théorème de M. Hadamard. Le point singulier y de $f\left(\frac{z}{y}\right)$ est bien extérieur au contour, le point singulier x est bien intérieur, la ligne yL est extérieure, la ligne $\frac{x}{L}$ obtenue en prenant l'inverse de chaque point de L et en multipliant par x est bien intérieure au contour comme le demande cette démonstration (*fig.* 3).

Fig. 3.



On voit que $t = \frac{x}{z}$ ne coupe pas la ligne L quand z parcourt le contour $\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2$, $\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ est donc bien défini et l'on a

$$\left|\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\right| < \frac{A}{\left|1 - \frac{x}{z}\right|^q}$$

et, de même,

$$\left|f\left(\frac{z}{y}\right)\right| < \frac{B}{\left|1 - \frac{z}{y}\right|^{q'}}.$$

Évaluons la partie de l'intégrale relative à l'arc γ_1 ; je désigne par M

une borne du module de $f\left(\frac{z}{y}\right)$ quand z est extérieur au cercle de centre y et intérieur à un cercle de grand rayon contenant toute la figure à son intérieur. Je pose $z = x + \rho e^{i\omega}$, ω varie de ω_1 à ω_2 sur l'arc γ_1 :

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\varphi\left(\frac{x}{z}\right)f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dz}{z}\right| < \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{M}A\rho^{1-q}}{[|x|-\rho]^{1-q}}(\omega_2-\omega_1).$$

Cette quantité tend vers zéro avec ρ. On verrait, par un calcul analogue, que l'intégrale le long de γ_2 tend vers zéro avec ρ'.

L'intégrale le long de ρ a donc une limite lorsque ρ et ρ' tendent vers zéro et c'est cette limite qui sera l'intégrale $\mathrm{J}(x, y)$. D'ailleurs $\mathrm{J}'(x, y)$ est indépendant de ρ et de ρ', de sorte que $\mathrm{J}(x, y) = \mathrm{J}'(x, y)$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} f\left(\frac{z}{y}\right)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z} = \mathrm{H}\left[f\left(\frac{x}{y}\right), \varphi(x)\right]$$

et l'on a ainsi une sorte de généralisation de l'intégrale de Parseval.

Ce qui précède s'applique si l'on remplace le contour C par C', D par D', L par une des demi-droites L'.

6. Je pars d'une fonction $\varphi(t)$ vérifiant les conditions que j'indique au début du n° 5 et je forme

$$\varphi_2(x) = \mathrm{H}[\varphi(x), \varphi(x)]; \qquad \varphi_3(x) = \mathrm{H}[\varphi_2(x), \varphi(x)], \qquad \ldots.$$

Ces fonctions n'ont que le point singulier 1. Je considère $\varphi_2(t)$ pour t appartenant au domaine D. Cette fonction sera donnée par

$$\frac{1}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}}\frac{1}{z}\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{z}{y}\right)dz$$

d'après ce qui précède, x et y étant sur C. Ceci montre que $\frac{2i\pi}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)$ est le premier noyau itéré du noyau $\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ fonction des deux variables x et y qui parcourent C. L'ordre de grandeur de $\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)$ pour x voisin de y doit pouvoir se déterminer comme on le fait pour les noyaux qui deviennent infinis pour $x = y$ dans le domaine réel. Mais ici encore, il n'est pas tout à fait évident que les méthodes ordinaires s'appliquent. Je reprends donc le calcul.

Je choisis une origine des arcs sur C. A chaque point x, y ou z, correspond une abscisse curviligne s_x, s_y ou s_z. $\left|\frac{dz}{ds_z}\right|$ a pour borne supérieure 1. Comme C est une courbe analytique, $z-x$ se laisse développer en série suivant les puissances de s_z et de s_x et est de la forme $(s_z - s_x)\,\mu(s_z, s_x)$. La fonction $\mu(s_z, s_x)$ est analytique pour s_x et s_z réels et compris entre o et l, longueur de la courbe. $\mu(s_z, s_x)$ ne peut être nulle, d'après sa définition, que si $z = x$, elle serait donc nulle pour des valeurs de s_z et s_x égales et égales à un nombre déterminé a. Mais alors $(s_z - a)\,\mu(s_z, a)$ admettrait la racine double a. $\frac{dz}{ds_z}$ admettrait la racine a, ce qui ne peut avoir lieu que si a est un rebroussement. La fonction continue $|\mu(s_z, s_x)|$, qui n'est jamais nulle dans le champ $0 \leqq s_x < l$, $0 \leqq s_z < l$, a donc une borne inférieure m. On a

$$\frac{1}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^l \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\cdot\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{z}{y}\right)\frac{dz}{ds_z}\,ds_z,$$

et, μ désignant le rayon vecteur minimum de l'ellipse C,

$$\left|\frac{1}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)\right| < \frac{1}{2\pi}\,\frac{A^2}{m^{2q}\mu^{2(1-q)}}\int_0^l \frac{1}{|s_z - s_x|^q\,|s_z - s_y|^q}\,ds_z.$$

On peut, maintenant, appliquer un calcul classique [1]. On voit que $\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)$ est de l'ordre de $\frac{1}{|s_x - s_y|^{2q-1}}$, et, par suite, de $\frac{1}{|x-y|^{2q-1}}$ pour x et y sur C. Donc, $|1-t|^{2q-1}|\varphi_2(t)|$ est borné, si t appartient au domaine D.

Les considérations précédentes sont valables si l'on remplace C par C′ et D par D′. C′ est, en effet, formé d'arcs analytiques, ne présente pas de points anguleux, les coordonnées cartésiennes d'un de ses points ainsi que leurs dérivées sont fonctions continues de l'arc de la courbe.

La fonction $|1-t|^{2q-1}|\varphi_2(t)|$ est donc bornée dans D et D′. Or, D et D′ peuvent être choisis de façon à recouvrir le voisinage du point 1. Je rappelle que $\varphi(x)$ est holomorphe dans tout domaine

---

[1] *Voir*, par exemple, Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 357.

n'ayant aucun point commun avec une ligne L′, ligne qu'il faut considérer ici comme donnée. Je choisis C′ de façon que L′ soit une des demi-droites extérieures à D′. Je puis ensuite choisir, comme on l'a vu, le contour C de façon que D et D′ recouvrent le voisinage du point 1.

Il est donc démontré que $|(1-t)^{2q-1}\varphi_2(t)|$ est borné au voisinage de 1 quand t est contenu dans un domaine où nous avons admis que $\varphi(t)$ est holomorphe.

Ce résultat obtenu, on démontrera, par l'étude de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{z}\varphi_2\left(\frac{x}{z}\right)\cdot\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{z}{y}\right)dz,$$

que $\frac{(2i\pi)^2}{y}\varphi_3\left(\frac{x}{y}\right)$ est le deuxième noyau itéré de $\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ et l'on calculera de même son ordre de grandeur pour x voisin de y. On peut, évidemment, continuer ainsi, et $\frac{(2i\pi)^{p-1}}{y}\varphi_p\left(\frac{x}{y}\right)$ est le $(p-1)^{\text{ème}}$ noyau itéré de $\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Il est comparable à $\frac{1}{|x-y|^{pq-(p-1)}}$. Donc, comme dans le cas des noyaux réels, $\frac{(2i\pi)^{p-1}}{y}\varphi_p\left(\frac{x}{y}\right)$ finit par rester borné pour p assez grand.

Il est à remarquer que ces résultats ne sont obtenus que par la considération simultanée des contours C et C′. Ils ne sont pas démontrés pour une fonction qui aurait la ligne L comme coupure essentielle et qui vérifierait les autres conditions. Il faut que $\varphi(x)$ soit prolongeable au delà de L vers le bas, jusqu'à une ligne L′ (ou vers le haut, jusqu'à une ligne L″), pour que notre démonstration s'applique.

7. Ce qui précède permet de considérer l'intégrale de Parseval généralisée comme une intégrale de Fredholm et d'appliquer les théorèmes de M. Fredholm. Je dois étudier le noyau résolvant du noyau $\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Ce noyau résolvant $\Gamma(x, y, \lambda)$ vérifie

$$(1)\qquad \lambda\int_C \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\Gamma(z, y, \lambda)\,dz = \Gamma(x, y, \lambda) - \frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Il est le prolongement analytique en λ de la série

$$(2)\quad \Gamma(x, y, \lambda) = \frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2i\pi\lambda}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots + \frac{(2i\pi\lambda)^{p-1}}{y}\varphi_p\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots$$

Enfin, il y a lieu d'en écrire l'expression que donne la théorie de M. Fredholm.

Je désigne par $\frac{(2i\pi)^{n-1}}{y}\varphi_n\left(\frac{x}{y}\right)$ le premier noyau itéré qui reste borné pour x voisin de y et j'utilise des notations analogues à celles de M. Goursat [1].

Je désigne par $D_n(\lambda)$ le « déterminant d'ordre infini » du noyau $\frac{(2i\pi)^{n-1}}{y}\varphi_n\left(\frac{x}{y}\right)$, par $\Gamma_n(x, y, \lambda)$ son noyau résolvant. Le premier théorème de M. Fredholm permet d'écrire :

$$\Gamma_n(x, y, \lambda) = \frac{D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D_n(\lambda)},$$

$D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ étant une fonction entière de λ. Je pose ensuite

$$H(x, y, \lambda) = \frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2i\pi\lambda}{y}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots + \frac{(2i\pi\lambda)^{n-2}}{y}\varphi_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right),$$

j'ai

$$(3)\quad \Gamma(x, y, \lambda) = H(x, y, \lambda) + \lambda^{n-1}\frac{D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda^n\right)}{D_n(\lambda^n)} + \frac{\lambda^n}{D_n(\lambda^n)}\int_0^1 H(x, z, \lambda)\, D_n\left(\begin{matrix} z \\ y \end{matrix}\middle|\lambda^n\right) dz,$$

et j'étudie les termes du deuxième membre, en commençant par $D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda^n\right)$. Il est connu que c'est une fonction entière de λ dont les coefficients sont certaines combinaisons linéaires des noyaux itérés de $\frac{1}{y}\varphi_n\left(\frac{x}{y}\right)$:

$$D_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda^n\right) = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\lambda^{(\alpha-1)n}\frac{1}{y}A_\alpha\left(\frac{x}{y}\right)$$

---

[1] Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 382 et suiv.

avec

$$A_\alpha\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{p=1}^{p_\alpha} C_p \varphi_{pn}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (x = 1, 2, \ldots).$$

On sait de plus que cette série admet une majorante. On a

$$\left|A_\alpha\left(\frac{x}{y}\right)\right| < B_\alpha,$$

pour x et y sur C, B_α étant tel que $\Sigma B_\alpha \lambda^\alpha$ soit une fonction entière.

Ceci montre d'abord que, sur C, $D_n\left(\frac{x}{y}\middle|\lambda^n\right)$ est de la forme $\frac{1}{y}\psi\left(\frac{x}{y}, \lambda\right)$. Posons $t = \frac{x}{y}$, $\psi(t, \lambda)$ est définie et holomorphe lorsque t est dans D. $\psi(t, \lambda)$ est en effet somme d'une série de fonctions holomorphes, série admettant une majorante, dans tout domaine formé de points appartenant à D et laissant le point 1 à l'extérieur.

$H(x, y, \lambda)$ est, de même, de la forme $\frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right)$ et cette fonction devient infinie comme $\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{y}\right)^q}$ pour x et y sur C. L'intégrale qui figure dans l'équation (3) est donc de celles que nous avons étudiées au n° 5. Il résulte de là que $\Gamma(x, y, \lambda)$ est de la forme $\frac{1}{y} Q\left(\frac{x}{y}, \lambda\right)$ et aussi que $Q\left(\frac{x}{y}, \lambda\right)$ est fonction de $t = \frac{x}{y}$ définie et holomorphe quand t est dans un domaine qui fait partie de D et qui laisse 1 à l'extérieur, pourvu que λ ne soit pas racine de $D_n(\lambda^n) = 0$.

On peut aller plus loin et donner une borne de $\Gamma(x, y, \lambda)$ lorsque λ est dans un domaine borné, la distance d'un point de ce domaine à une racine de $D_n(\lambda^n) = 0$ admettant une borne inférieure et lorsque $t = \frac{x}{y}$ est dans un domaine D_1 qui fait partie de D mais laisse le point 1 à l'extérieur.

Il est clair que, dans ces conditions,

$$\psi(t, \lambda^n) = y D_n\left(\frac{x}{y}\middle|\lambda^n\right)$$

admet une borne. $H(x, y, \lambda)$ en admet une aussi. Il reste à étudier

l'intégrale qui figure dans l'équation (3). Je suppose x et y sur C et je reprends les notations du n° **6**,

$$\left|D_n\left(\frac{x}{y}\middle|\lambda^n\right)\right| = \left|\frac{\psi(t, \lambda^n)}{y}\right| < \frac{B}{\mu} \qquad |H(x, y, \lambda)| < \frac{B'}{\mu^{1-q}|x-y|^q},$$

B et B′ étant des constantes qui ne dépendent que de l'ellipse C,

$$\left|\int_C H(x, z, \lambda) D_n\left(\frac{z}{y}\middle|\lambda^n\right) dz\right| < \int_0^t \left|H(x, z, \lambda) D_n\left(\frac{z}{y}\middle|\lambda^n\right)\frac{dz}{ds_z}\right| ds_z$$
$$< \frac{BB'}{\mu^{2-q} m^q} \int_0^t \frac{ds_z}{|s_x - s_z|^q}$$

et cette quantité est bornée.

En résumé, $\Gamma(x, y, \lambda)$ est borné dans les conditions indiquées. $Q(t, \lambda)$ l'est aussi.

8. Je remarque que l'on a (si $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$)

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{z^n}{y^n}dz = \frac{x^n}{y^n}a_n,$$

d'après la formule du n° **5**. La quantité $\frac{2i\pi}{a_n}$ est donc constante caractéristique du noyau $\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Ceci montre que a_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. C'est un premier résultat relatif aux fonctions définies au début du n° **5**.

Posons

$$\Phi(t, u) = \frac{1}{u^2}Q\left(t, \frac{1}{2i\pi u}\right) + \frac{1}{u}\frac{1}{1-t}.$$

Je suppose que u parcoure un contour simple σ entourant l'origine, contenant à son intérieur tous les points a_n. S'il existe des valeurs caractéristiques λ_p autres que $\frac{2i\pi}{a_n}$ je supposerai que σ ne passe par aucun point d'affixe $\frac{2i\pi}{\lambda_p}$.

Soit $g(u)$ une fonction holomorphe sur σ et à l'intérieur de σ. Je considère

$$F(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma \Phi(t, u) g(u) du.$$

Si u est sur σ et t dans D_1, $Q\left(t, \frac{1}{2i\pi u}\right)$ admet une borne indépendante de t et de u, d'après les résultats du n° **7**. Il en est de même de $\Phi(t, u)g(u)$. La méthode de M. Montel [1] montre que $F(t)$ est alors fonction holomorphe de t dans D_1.

Pour tirer parti de ce résultat, je cherche le développement de $\Phi(t, u)$ au voisinage de $t = 0$. Je suppose

$$|t| < \theta < 1; \quad \left|\frac{u}{a_n}\right| > a > 1 \qquad (\text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Alors, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{u - a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^n a_n^p}{u^{p+1}}$$

admet une majorante

$$\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{a^p},$$

r étant la plus courte distance de l'origine au contour σ. On peut grouper les termes d'une autre manière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{u - a_n} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{u^{p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p t^n = \frac{1}{u} \frac{1}{1-t} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{u^{p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^p t^n$$

$$= \frac{1}{u} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{u^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{u^{p-1}} \varphi_p(t) = \Phi(t, u).$$

Si donc tous les points du contour σ sont tels que $|u| > aa_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on peut, pour les valeurs de t qui appartiennent à D_1 et qui sont inférieures à θ, remplacer $\Phi(t, u)$ par $\sum \frac{t^n}{u - a_n}$ dans l'expression de $F(t)$. On peut aussi intégrer terme à terme et il vient :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(a_n) t^n.$$

---

[1] MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes*, p. 27-28.

Cette série a donc pour prolongement une fonction holomorphe dans D_1.

Si le contour σ, à l'intérieur et sur lequel $g(u)$ est holomorphe, ne vérifie pas une inégalité de la forme $\left|\frac{u}{a_n}\right| > a > 1$, on n'a qu'à remplacer $\varphi(x)$ par une fonction dont les coefficients vérifient cette relation en diminuant le module de certains d'entre eux. Comme les a_n n'ont pas d'autre point limite que l'origine, il n'y a qu'un nombre fini de termes à modifier et le résultat subsiste.

Le domaine D_1 peut comprendre tout point du plan à l'exclusion de ceux qui sont sur l'axe réel. Donc $F(t)$ n'a pas de point singulier hors de l'axe réel.

On peut remplacer le contour C par un contour C′ (ou C″) : ce qui précède subsiste entièrement, $F(t)$ est holomorphe à l'intérieur des domaines D′ (ou D″), $F(t)$ est donc holomorphe dans les régions où nous avons admis que $\varphi(t)$ l'était. Nous énoncerons d'une manière moins précise :

Si $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ n'a d'autre point singulier à distance finie que le point singulier 1, *en supposant que les prolongements analytiques ne fassent le tour d'aucun point singulier; si, de plus, le point singulier* 1 *est d'ordre q* [1], *la fonction $\Sigma g(a_n) x^n$ n'a pas d'autre point singulier que* 1, *toutes les fois que $g(u)$ est holomorphe à l'origine.* (*Les a_n n'ont pas d'autre limite que l'origine, et $g(a_n)$ est, par suite, définie dès que n est assez grand.*)

Il résulte de nos démonstrations que l'ordre de $\Phi(t, u)$ est 1, ce sera aussi l'ordre de $F(t)$ en général.

9. *Cas particulier. Théorème de M. Fabry.* — Le cas où $a_n = \frac{1}{n}$, $\varphi(x) = L\frac{1}{(1-x)}$ a été particulièrement étudié. On peut obtenir des résultats plus complets que dans le cas général et ne pas supposer que $g(u)$ soit holomorphe à l'origine. Je pose $u = re^{i\alpha}$ et je suppose que $g(u)$ soit holomorphe pour $|\alpha| < \alpha_0$, $0 < r < r_0$. Je suppose en

---

[1] Je rappelle que ces façons de parler ont été précisées au n° 5.

outre que $g(u)$ vérifie certaines conditions de grandeur dans ce domaine où elle est holomorphe.

M. Fabry a démontré que si $r\mathrm{L}|g(u)|$ a uniformément pour plus grande des limites zéro [1] lorsque r tend vers zéro, $\mathrm{F}(x) = \Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ n'a que le point singulier 1 sur son cercle de convergence.

M. Le Roy a démontré de plus que si α_0 est égal à $\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{F}(x)$ n'a de point singulier que sur l'axe réel du côté positif. Il supposait, il est vrai, que $g(u)$ vérifie une autre condition, mais MM. Mellin et Lindelöf ont établi que le résultat est exact sous la seule condition $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$. M. Lindelöf [2] donne, de plus, une étude détaillée de $\mathrm{F}(x)$ dans le cas où α_0 est égal à $\frac{\pi}{2}$ et il signale d'autres cas plus particuliers intéressants. Je ne reprends pas ces questions, je n'étudierai qu'un cas particulier nouveau et je montrerai ensuite que le théorème de M. Le Roy et aussi le théorème de M. Fabry, dont la démonstration est assez compliquée, peuvent se déduire très simplement des propriétés de la fonction $\Phi(x, u)$ pour u voisin de zéro. Je pose

$$\mathrm{R}(x, u) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n - \frac{1}{u}} = \mathrm{Q}\left(x, \frac{1}{2i\pi u}\right),$$

et j'ai

$$\Phi(x, u) = \frac{1}{u}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{u^2}\,\mathrm{R}(x, u).$$

Je considère un contour σ du plan de la variable $u = re^{i\alpha}$ comprenant deux segments de droite OA_1 et OA_2 dont les arguments sont α_1 et α_2 et un arc de courbe $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ raccordant ces deux droites, les points $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$, étant intérieurs à σ. Soit $g(u)$ une fonction holomorphe à l'intérieur de σ et sur le contour (sauf à l'origine) et admettant une borne quand u est dans ce domaine. Je suppose que $\mathrm{R}(x, u)$ soit bornée quand u est sur le contour σ (mais pas nécessairement à l'intérieur) et quand x est dans un domaine Δ, contenant l'origine et laissant le point 1 à l'extérieur. *Dans ces conditions*, $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ *est*

---

(1) Cette expression a été définie au n° 1.

(2) *Leçons sur le calcul des résidus*, Chap. V.

holomorphe dans Δ. Je vois, en effet, que $u^2\Phi(x, u)$ est borné si x est dans Δ et u sur σ. Le raisonnement de M. Montel montre encore que

$$F_1(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma u^2\,\Phi(x, u)\,g(u)\,du$$

est fonction holomorphe de x dans Δ. Si $|x|$ est inférieur à un nombre fixe, inférieur à 1, on peut remplacer $\Phi(x, u)$ par $\sum \frac{x^n}{u - \frac{1}{n}}$ et intégrer terme à terme

$$F_1(x) = \sum_1^\infty x^n \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma \frac{u^2 g(u)}{u - \frac{1}{n}}\,du.$$

La fonction $u^2 g(u)$ n'est pas holomorphe sur σ, mais elle est bornée et son seul point singulier, sur le contour σ et à l'intérieur, est le point O. On peut, par un raisonnement semblable à celui du n° 5, établir que la formule habituelle du calcul des résidus est applicable. On a donc

$$F_1(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\, g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$$

et cette fonction est holomorphe en même temps que

$$F(x) = \sum g\left(\frac{1}{n}\right) x^n.$$

$R(x, u)$ est borné quel que soit x dans Δ, comme on l'a montré plus haut, tant que u reste à une distance bornée inférieurement des points $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Il nous suffit donc d'étudier $R(x, u)$ sur la partie du contour σ voisine de l'origine et pour cela sur une droite OA d'argument α.

10. Supposons d'abord $\cos\alpha$ négatif. Je prendrai comme point de départ l'égalité

$$\int_0^1 t^{-\frac{1}{n}} t^n\,dt = \frac{1}{n - \frac{1}{n} + 1},$$

où n est un nombre entier quelconque. L'intégrale est prise sur l'axe réel, la détermination de $t^{-\frac{1}{u}}$ est $e^{-\frac{1}{u}\mathrm{L}(t)}$ ($\mathrm{L}(t)$ réel).

On sait que M. Hadamard a déduit de là que [1] $\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{u}}}{1-tx}\,dt$ représente le prolongement analytique de la série $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n-\frac{1}{u}+1}$. Donc

$$\mathrm{R}(x, u) = x\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{u}}\,dt}{1-tx}.$$

Soit Δ un domaine borné, contenant l'origine, laissant à l'extérieur la demi-droite L formée des points dont l'affixe est réel et supérieur à 1. Si x est dans Δ, si t est sur le segment 0, 1, la fonction $\left|\frac{x}{1-tx}\right|$ admet une borne. D'autre part, si $u = re^{i\alpha}$, $\left|t^{-\frac{1}{u}}\right| = t^{-\frac{1}{r}\cos\alpha}$, quantité qui est au plus égale à 1 si t est positif et inférieur à 1. On voit donc que $\mathrm{R}(x, u)$ est borné dans Δ.

Nous pouvons aussi étudier des domaines Δ coupant la ligne L. L'intégrale

$$x\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{u}}\,dt}{1-tx}$$

représente toujours $\mathrm{R}(x, u)$ si elle est prise sur un arc de courbe rectifiable l, joignant 0 et 1, ne se coupant pas lui-même, pourvu que la fonction à intégrer soit bornée lorsque t tend vers zéro sur cet arc et que le domaine Δ laisse à l'extérieur la courbe l' décrite par $\frac{1}{t}$ quand t décrit l. Si je pose $t = \rho e^{i\omega}$,

$$\left|t^{-\frac{1}{u}}\right| = e^{-\cos\alpha\,\mathrm{L}\rho + \omega\sin\alpha\,\frac{1}{r}},$$

et si t tend vers zéro suivant une direction bien déterminée,

$$\cos\alpha\,\mathrm{L}\rho + \omega\sin\alpha$$

---

[1] Hadamard, *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII, 1892, p. 159 et suiv.

croît indéfiniment par valeurs positives et $\left|t^{-\frac{1}{u}}\right|$ est inférieur à 1. La fonction $R(x, u)$ est donc bornée dans tout domaine Δ du plan des x pourvu de la coupure l. Cette courbe l' est d'ailleurs une courbe arbitraire partant du point 1, allant à l'infini, ne se coupant pas elle-même et pourvue d'une asymptote. On peut donc dire que $R(x, u)$ est borné dans tout domaine qui laisse le point 1 à l'extérieur et qui ne fait pas le tour du point 1.

En nous reportant au n° 9 nous pouvons conclure :

Si la fonction $g(u)$ est holomorphe et bornée à l'intérieur du domaine parcouru par la variable u quand on a $r < r_0 |\alpha| - \alpha_0$ avec $\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$, $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ n'a que le point singulier $x = 1$, si les prolongements analytiques ne font le tour d'aucun point singulier.

11. Je suppose que le point u soit sur la demi-droite d'argument α tel que $\cos\alpha$ soit positif. Les intégrales qu'on vient d'étudier n'existent plus. On peut cependant obtenir des résultats en partant de l'égalité

$$\int_\xi^1 t^{-\frac{1}{u}} t^n\, dt = \frac{1}{n - \frac{1}{u} + 1} - \frac{\xi^{n - \frac{1}{u} + 1}}{n - \frac{1}{u} + 1},$$

l'intégrale étant prise le long d'une ligne C ne passant pas à l'origine. La détermination de $t^{-\frac{1}{u}}$ s'obtient en posant $t = \rho e^{i\omega}$, $t^{-\frac{1}{u}} = e^{-\frac{1}{u}(\log\rho + i\omega)}$ et en faisant varier ω d'une manière continue à partir de $\omega = 0$ qui correspond à $t = 1$.

Je considère encore l'intégrale

$$J(x, u) = \int_C \frac{t^{-\frac{1}{u}} dt}{1 - tx}.$$

Je suppose x dans un domaine Δ, borné, contenant l'origine, laissant à l'extérieur les points de la ligne C′ qui se déduisent des points de C par le changement de l'affixe t en $\frac{1}{t}$. Alors, $J(x, u)$ est, de même que les intégrales déjà vues, pour une valeur de u bien déterminée, fonction holomorphe de x dans Δ. Je cherche le développement en série de

$J(x, u)$ au voisinage de l'origine, je désigne par τ la plus grande valeur de $|t|$ sur C, je prends $|x| < \frac{\theta}{\tau}$, θ étant un nombre inférieur à 1.

Je puis développer $\frac{t^{-\frac{1}{u}}}{1 - tx}$ suivant les puissances de x et intégrer terme à terme :

$$J(x, u) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n - \frac{1}{u} + 1} = \xi^{-\frac{1}{u}} \sum_0^\infty \frac{\xi(\xi x)^n}{n - \frac{1}{u} + 1},$$

d'où

$$(4) \qquad xJ(x, u) = R(x, u) - \xi^{-\frac{1}{u}} R(\xi x, u)$$

et cette équation est valable lorsque x est dans Δ.

Je prendrai pour C un arc de la spirale logarithmique d'équation $\rho = e^{-\omega \operatorname{tang} \alpha}$ de sorte que si $t = \rho e^{i\omega}$ est un point de cette courbe, on a $|t^{-\frac{1}{u}}| = 1$. L'arc C et son extrémité le point ξ sont pris intérieurs au cercle de rayon 1.

La courbe C′ est alors la partie de la spirale extérieure au cercle de rayon 1 et qui va du point 1 au point $\frac{1}{\xi}$. Je supposerai le domaine Δ intérieur au cercle de rayon $\frac{\theta}{|\xi|}$, θ étant un nombre positif inférieur à 1. Je dis que dans ces conditions $R(x, u)$ admet une borne indépendante de $r = |u|$ et de x.

$|R(\xi x, u)|$ admet d'abord une borne, puisque $|\xi x| < \theta < 1$

$$|R(\xi x, u| < \sum_{n=1}^\infty \frac{\theta^n}{\left|n - \frac{1}{u}\right|} < \sum_{n=1}^\infty \frac{\theta^n}{n \sin \alpha};$$

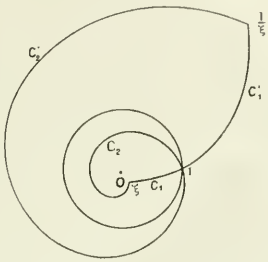
$\xi^{-\frac{1}{u}}$ est égal à 1, enfin l'intégrale $J(x, u)$ est bornée, car $|t^{-\frac{1}{u}}| = 1$ sur C et $\frac{1}{1 - tx}$ admet une borne si x est dans Δ, puisque $\frac{1}{t}$ parcourt l'arc C′ extérieur à Δ. L'équation (4) montre que $|R(x, u)|$ est borné.

On peut déduire de là le théorème de M. Fabry :

Supposons qu'une fonction $g(u)$ soit holomorphe et bornée dans le domaine de la variable $u = re^{i\alpha}$ défini par $-\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $r < r_0$ (avec $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $r_0 > 0$), sauf à l'origine qui est point singulier.

Je trace (*fig.* 4) deux arcs de spirale $\rho = e^{\omega \operatorname{tang} \alpha_1}$, $\rho = e^{-\omega \operatorname{tang} \alpha_2}$ que je désigne par C_1 et C_2. Ils sont intérieurs au cercle de rayon 1 et disposés comme l'indique la figure. Je désigne par C'_1 et C'_2 les arcs des

Fig. 4.



mêmes spirales déduits de C_1 et de C_2 par le changement de l'affixe t d'un de leurs points en $\frac{1}{t}$. Enfin, je limite C_1 et C_2 au point 1 et à leur premier point de rencontre ξ, C'_1 et C'_2 sont limités au point $\frac{1}{\xi}$. Je considère ensuite un domaine Δ intérieur au contour formé de C'_1 et C'_2; il résulte de ce qui précède que si x est dans Δ, $R(x, u)$ est borné, que u soit sur la demi-droite OA_1 d'argument $-\alpha_1$ ou sur la demi-droite OA_2 d'argument α_2. $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x_n$ est donc holomorphe dans Δ.

Je suppose maintenant, non plus que $|g(u)|$ soit bornée dans le domaine indiqué pour u, mais que $|u| L |g(u)|$ ait uniformément pour plus grande limite zéro lorsque $|u|$ tend vers zéro. C'est dire que, quel que soit ε positif, $|g(u)| e^{-\varepsilon \left|\frac{1}{u}\right|}$ est borné. La fonction $g(u) e^{-\frac{\lambda}{u}}$ est de module borné quel que soit le nombre positif λ, car

$$\left| g(u) . e^{-\frac{\lambda}{u}} \right| = \left| g(u) \right| e^{-\frac{\lambda}{r} \cos \alpha} \qquad \text{si } u = re^{i\alpha}$$

et cette expression est inférieure à $|g(u)| e^{\frac{\lambda}{r} \cos \alpha'}$, α' désignant le plus grand des deux arcs α_1 et α_2. La fonction $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{x}{e^{\lambda}}\right)^n$ est holomorphe dans le domaine Δ. La fonction $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ est holomorphe

dans le domaine Δ_λ qui se déduit de Δ en divisant l'affixe de chacun de ses points par e^λ. Comme e^λ est aussi voisin de 1 qu'on le veut, $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right)x^n$ est holomorphe à l'intérieur de Δ, qui est lui-même aussi voisin qu'on le veut du domaine limité par les arcs C'_1 et C'_2.

Si $g(u)$ est holomorphe pour $-\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, $r < r_0$ et sur la frontière de ce domaine sauf au point $u = 0$, si $rL|g(u)|$ a uniformément dans ce domaine pour plus grande des limites zéro lorsque r tend vers zéro, la fonction $F(x) = \Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ n'a, sur le cercle de convergence, que le point singulier 1 et elle est holomorphe entre les arcs C'_1 et C'_2.

Je suppose maintenant que l'on puisse prendre α_2 aussi voisin de $\frac{\pi}{2}$ qu'on le voudra, α_1 restant fixe. On peut supposer que $\frac{1}{\xi}$ se déplace sur C'_1. La valeur de ω au point $\frac{1}{\xi}$ de C'_1 est

$$2\pi \frac{\operatorname{tang}\alpha_1}{\operatorname{tang}\alpha_1 + \operatorname{tang}\alpha_2}.$$

Si α_1 tend vers $\frac{\pi}{2}$, cette expression tend vers 2π. Alors $F(x)$ est holomorphe dans le domaine compris entre l'arc de spirale $\rho = e^{\omega \operatorname{tang}\alpha_2}$ pour ω variant entre 0 et 2π, et l'axe réel. Si α_2 peut lui aussi être pris aussi voisin de $\frac{\pi}{2}$ qu'on le voudra, le domaine que nous venons d'obtenir peut contenir tout point du plan autre qu'un point d'affixe réel, supérieur à 1 et l'on a le théorème de M. Le Roy.

Si $g(u)$ est holomorphe dans le domaine défini par

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \qquad r < r_0,$$

si dans ce domaine et sur sa frontière $rL|g(u)|$ est inférieur à tout nombre donné ε dès que ε est assez petit, $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ n'a de point singulier que sur la partie positive de l'axe réel.

On peut donner un énoncé un peu plus général : il suffit que

$rL|g(u)|$ devienne inférieur à ε pour : $|\arg u| < \alpha$; $r < r_0$; r_0 dépendant de ε et de α et ne restant pas borné inférieurement si α tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Je signalerai, pour terminer, un cas intermédiaire entre celui du n° **10** et celui du n° **11**. $g(u)$ sera supposée bornée et holomorphe dans le domaine $-\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ avec $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < 0$, $\frac{\pi}{2} < \alpha_2 < \pi$. Alors $F(x)$ n'a de point singulier que sur la spirale $\rho = e^{\omega \operatorname{tang} \alpha_1}$ (pour $\omega > 0$). On peut d'ailleurs remplacer cette spirale par la spirale $\rho = e^{\omega \operatorname{tang} \alpha}$ si $\alpha < \alpha_1$ ($\alpha > 0$), ce qui montre que les points de la spirale $\rho = e^{\omega \operatorname{tang} \alpha_1}$ ne sont pas singuliers si l'on effectue le prolongement analytique en abordant la spirale du côté de sa convexité. Mais, peut-être, le sont-ils cependant, si l'on aborde la spirale du côté de la concavité et si $g(u)$ ne répond plus aux conditions que nous lui avons imposées quand on remplace α_1 par un angle aigu plus grand.

12. Les coupures obtenues sont-elles essentielles? Il paraît difficile de donner à cette question une réponse générale. Je me contenterai d'affirmer d'abord que les contours C_1 et C_2 que j'ai choisis sont ceux qui, par la méthode employée, donnent pour $F(x)$ le champ d'holomorphie le plus étendu. Je n'ai pas mis ce point en évidence dans le raisonnement précédent, mais il est facile de s'en rendre compte.

J'étudierai ensuite un exemple que j'emprunte à M. Fabry [1] :

$$F(x) = \sum e^{n^{[1+\cos(n\lambda)]}} x^n \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Il résulte du calcul de M. Fabry que α_1 et α_2 peuvent être pris aussi voisins de $\frac{\pi}{2}$ qu'on le veut. $F(x)$ n'a donc de point singulier que sur l'axe réel.

Je considère de même

$$\varphi(x) = \sum e^{n^{[1-\cos(n\lambda)]}} x^n ;$$

un calcul analogue donne le même résultat. Il en résulte que la fonction

$$\Psi(x) = \varphi(e^2 x) = \sum e^{n^{[1-\cos(n\lambda)]}} x^n$$

---

[1] *Journal de Liouville*, 5e série, t. IV, 1898, p. 348.

n'a de point singulier que sur la droite qui joint le point e^{-2} au point à l'infini sur l'axe réel positif. L'une au moins des deux fonctions $F(x)$ et $\Psi(x)$ a un point singulier autre que celui de son cercle de convergence : S'il en était autrement, $H[F, \Psi]$ n'aurait que le point singulier e^{-2}; or, cette fonction est $\frac{1}{1-x}$. On peut donc prévoir qu'il n'est pas possible d'aller, dans le cas général, plus loin que ne l'indiquent les résultats précédents. Il est certain d'autre part que, dans des cas particuliers, les coupures obtenues ne sont pas essentielles : prenons $g(u) = e^{-\frac{1}{u}}$. Si l'argument α de u est tel que $\cos\alpha$ soit positif, le module de $g(u)$ est borné. On est dans le cas de M. Le Roy et cependant $F(x)$ n'a que le point singulier e sur l'axe réel.

Je signale d'autres exemples qui offrent de l'intérêt, à d'autres points de vue.

Je prends $g(u) = e^{-ai\,\mathrm{L}u}$ (a réel). Alors $|g(u)| = e^{a\alpha}$ reste borné au voisinage de l'origine. Donc $\Sigma e^{ai\,\mathrm{L}n}.x^n = \Sigma n^{ai}.x^n$ n'a, dans tout le plan, d'autre point singulier que 1. Il en est de même des fonctions $\Sigma \sin(a\mathrm{L}n).x^n$ et $\Sigma \cos(a\mathrm{L}n).x^n$, qui se déduisent facilement des précédentes et qui sont bien connues.

Je prends ensuite $g(u) = e^{aiu^\sigma}$, a étant réel et σ réel et positif. Alors $|g(u)| = e^{-ar^\sigma \sin(\alpha\sigma)}$ est borné, de sorte que $\Sigma e^{ai\frac{1}{n^\sigma}}.x^n$ n'a que le point singulier 1.

15. Je vais montrer, par l'étude de deux exemples, que les derniers théorèmes peuvent être utilisés, non seulement pour la recherche des singularités de certaines séries, mais aussi pour l'étude d'une fonction $g(u)$ au voisinage d'un point singulier.

Soit $g(u)$ une fonction singulière pour $u = 0$, mais holomorphe et bornée dans le secteur défini par $-\alpha_1 < \alpha < \alpha_1$, $r < r_0$ avec $\alpha_1 > \frac{\pi}{3}$. Alors, comme $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right).x^n$ ne peut avoir que le point singulier 1, d'après le n° **10**, la plus grande des limites de $\sqrt[n]{\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|}$ ne peut être que 1 ou 0; elle ne peut être un nombre compris entre 0 et 1.

Soit, en second lieu, une fonction $g(u)$, singulière pour $u = 0$, mais holomorphe pour tout autre point du secteur défini par $-\alpha_1 < \alpha < \alpha_1$, α_1 étant quelconque. De plus, $|u| L|g(u)|$ a uniformément pour plus grande limite zéro, lorsque $|u|$ tend vers zéro dans ce domaine. Je vais montrer que, dans ces conditions, les points de l'axe réel pour lesquels la partie réelle $R[g(u)]$ de $g(u)$ change de signe ne sont pas distribués d'une manière quelconque au voisinage de l'origine. Par exemple, il est impossible que les racines de $R[g(u)]$ soient les nombres $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \ldots, \frac{a}{n}, \ldots$, qu'elles soient simples, et qu'il n'y en ait pas d'autres (a est un nombre positif quelconque).

S'il en était ainsi, $R[g(au - u^3)]$ changerait de signe quand u passerait de la valeur $\frac{1}{n}$ à la valeur $\frac{1}{n+1}$, pourvu que n soit assez grand.

On a

$$|u| L|g(au - u^3)| = |au - u^3| L|g(au - u^3)| \frac{1}{|a - u^2|}.$$

Or, si $|u|$ est assez petit, $|au - u^3)| L|g(au - u^3)|$ peut devenir inférieur à toute quantité donnée, cela tient à notre hypothèse et au fait que $au - u^3$ tend vers zéro avec u. Comme $\frac{1}{a - u^2}$ tend vers $\frac{1}{a}$, on voit que $|u| L|g(au - u^3)|$ devient inférieur à toute quantité positive donnée si $|u|$ est assez petit. Il résulte d'un théorème de M. Fabry que la série $\Sigma g\left(\frac{a}{n} - \frac{1}{n^3}\right) x^n$ n'a que le point singulier 1 sur son cercle de convergence. La série $\Sigma(-1)^n g\left(\frac{a}{n} - \frac{1}{n^3}\right) x^n$ n'y a que le point singulier -1. Or, ceci est impossible, puisque la partie réelle des coefficients est toujours positive.

Si $g\left(\frac{1}{u}\right)$ était entière et d'ordre inférieur à 1, ce résultat serait une conséquence des théorèmes de M. Hadamard sur les fonctions entières. On voit qu'il subsiste lorsque $\left|g\left(\frac{1}{u}\right)\right| < e^{\varepsilon|u|}$, si petit que soit ε, dès que $|u|$ est assez grand, et aussi lorsque la fonction n'est pas entière, mais vérifie des conditions plus générales.

DEUXIÈME PARTIE.

14. Les méthodes que nous employons dans ce travail ne permettent pas, en général, d'étudier toutes les déterminations des fonctions analytiques dont nous nous occupons. D'un autre côté, les nombreuses applications du théorème de la multiplication des singularités que nous aurons à faire seront facilitées si l'on considère les points intérieurs à des espaces lacunaires comme singuliers [1]. Nous adopterons donc, du point singulier, la définition particulière que voici :

Un point A du plan sera régulier pour la fonction $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ si le prolongement analytique de la série peut être poursuivi, au delà de OA, le long du rayon OA issu de l'origine O. Si un point A ne peut être ainsi atteint, il y en a d'autres dans le même cas que lui : ceux qui sont plus éloignés que lui de l'origine. Dès lors, parmi les points du rayon OA, qui ne sont pas reconnus comme réguliers, il y en a un qui est plus près de l'origine que tous les autres. Celui-là, que nous désignerons par A, sera singulier. Soit maintenant B, sur le prolongement de OA. Il sera régulier si on peut l'atteindre par un chemin OB n'ayant que O et B en commun avec la demi-droite OB. Dans le cas contraire, il sera singulier.

Avec cette définition, le théorème de la multiplication des singularités ne souffre pas d'exception. Si $H[\varphi, k]$ est singulière en un point α, c'est que l'on a $\alpha = \beta\gamma$, β étant un point singulier de $\varphi(x)$ et γ un point singulier de $k(x)$.

Quand je dirai qu'une fonction n'a qu'un point singulier, il faudra l'entendre au sens précédent. De plus, elle pourra être irrégulière au point à l'infini dont nous ne nous occuperons pas. Le mot point singulier ayant le sens qui précède, le point singulier β de $\varphi(x)$ sera dit principal si, quel que soit le point singulier γ de $k(x)$, $\beta\gamma$ est toujours point singulier pour $H[\varphi, k]$ si on ne peut l'obtenir qu'une seule fois.

---

[1] *Voir* MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes*, note p. 36.

13. *Points singuliers principaux isolés et séparables.* — Je considère simultanément les deux fonctions

$$\varphi(x) = \sum a_n x^n, \qquad \varphi_{-1}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n},$$

et je suppose qu'aucun a_n ne soit nul. Je désigne par R' et $\frac{1}{R}$ la plus petite et la plus grande des limites de la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$. Le rayon de convergence de $\varphi(x)$ est R et celui de $\varphi_{-1}(x)$ est R'. On a d'ailleurs $RR' \leqq 1$.

Si la fonction $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier β, pour que ce point soit principal, il faut et suffit que R' soit différent de zéro et que $\varphi_{-1}(x)$ n'ait qu'un point singulier qui sera alors $\frac{1}{\beta}$ et qui sera principal.

Je suppose que β soit singulier principal pour $\varphi(x)$, qui n'a pas d'autre point singulier. Si R' était nul, on pourrait extraire de la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$, une suite illimitée

$$\sqrt[n_1]{|a_{n_1}|}, \quad \sqrt[n_2]{|a_{n_2}|}, \quad \ldots,$$

ayant zéro pour limite unique. La série

$$k(x) = x^{n_1} + x^{n_2} + \ldots$$

aurait au moins un point singulier sur son cercle de rayon 1, et cependant $H[\varphi, k]$ serait une fonction entière, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que β est principal.

Il résulte de là que nous pouvons supposer qu'aucun des coefficients a_n n'est nul, sans diminuer la généralité des énoncés, quand β est le seul point singulier de $\varphi(x)$ et qu'il est principal. Cela étant, $\varphi_{-1}(x)$ existe. Soit γ un de ses points singuliers :

$$(1) \qquad H[\varphi, \varphi_{-1}] = \frac{1}{1 - x}.$$

$\beta\gamma$ ne peut être obtenu qu'une fois; il est donc nécessairement égal à 1, et $\varphi_{-1}(x)$ n'a pas d'autre point singulier que $\frac{1}{\beta}$.

Réciproquement, je suppose que $\varphi_{-1}(x)$ n'admette pas d'autre singularité que $\frac{1}{\beta}$. Soient $k(x)$ une fonction définie par une série entière en x, et δ un de ses points singuliers. On a

$$(2) \qquad H[\varphi_{-1}, H[\varphi, k]] = k(x).$$

Le théorème de M. Hadamard montre que $H[\varphi, k]$ possède un point singulier λ qui, associé à $\frac{1}{\beta}$, donne δ. Donc $\lambda = \beta\delta$ (¹).

Si la fonction $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier principal β, $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'a qu'une limite. S'il en était autrement, R' serait inférieur à $\frac{1}{R}$ et, sur le cercle de convergence de $\varphi_{-1}(x)$, existerait au moins un point singulier γ dont le module serait inférieur à $\frac{1}{\beta}$, ce qui serait en contradiction avec l'énoncé précédent.

16. J'indique une autre propriété des fonctions que nous venons de considérer et, pour cela, je sépare le module et l'argument des coefficients en posant $a_n = \rho_n e^{i\omega_n}$. Je désigne d'une manière générale par $\overline{\Lambda}$ l'imaginaire conjuguée de l'imaginaire Λ. On a

$$\overline{\varphi}(\overline{x}) = \Sigma \rho_n e^{-i\omega_n} \overline{x}^n; \qquad \overline{\varphi}(\overline{x}) = \Sigma \rho_n e^{-i\omega_n} x^n.$$

Je pose $\overline{\varphi}(\overline{x}) = \psi(x)$. Les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont en relation simple : à tout prolongement analytique de l'une correspond un prolongement de l'autre, les chemins étant symétriques par rapport à l'axe réel. Les points singuliers de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ sont deux à deux imaginaires conjugués.

Voici une autre remarque que je vais utiliser : Si deux fonctions $\varphi(x)$ et $k(x)$ n'ont, l'une et l'autre, pour toute singularité, qu'un point singulier principal, il en est de même de $H[\varphi, k]$, comme on le voit, par exemple, à l'aide de l'énoncé du n° **15**.

Considérons maintenant une fonction $\varphi(x)$ qui n'a qu'un point

(¹) Cette propriété a déjà été utilisée dans des cas particuliers (Montel, *Leçons sur les séries de polynomes*, p. 87. — Fabry, Mémoire cité, p. 350).

singulier, $\psi(x)$ possède la même propriété et, par suite,

$$H[\varphi, \psi] = \Sigma \rho_n^2 x^n$$

n'a qu'un point singulier. Cette dernière fonction n'est d'ailleurs certainement pas entière, même si le point singulier de $\varphi(x)$ n'est pas principal.

Si $\varphi(x)$ n'admet qu'un seul point singulier, pour qu'il soit principal il faut et suffit que les deux fonctions

$$\Sigma \rho_n^2 x^n \quad \text{et} \quad \Sigma e^{2i\omega_n} x^n$$

n'admettent chacune qu'un point singulier et que ce point soit principal.

Admettons que $\varphi(x)$ ne possède qu'un point singulier qui soit principal. Il en est de même de

$$\varphi_{-1}(x) = \sum \frac{1}{\rho_n} e^{-i\omega_n} x^n \qquad \text{et de} \quad \psi(x) = \sum \rho_n e^{-i\omega_n} x^n$$

et, par suite, aussi de

$$H[\varphi_{-1}, \psi] = \Sigma e^{-2i\omega_n} x^n$$

et enfin de

$$\Sigma e^{2i\omega_n} x^n.$$

Reste à montrer que le point singulier de $\Sigma \rho_n^2 x^n$ est principal. On y parvient en associant la série $\Sigma e^{-2i\omega_n} x^n$ à la série $\Sigma \rho^{2n} e^{2i\omega_n} x^n$ pour lesquelles la proposition est démontrée.

Réciproquement, admettons que $\varphi(x) = \Sigma \rho_n e^{i\omega_n} x^n$ n'ait qu'un point singulier et que les séries $\Sigma \rho_n^2 x^n$ et $\Sigma e^{2i\omega_n} x^n$ n'en aient chacune qu'un qui soit principal. Il en est de même, alors, de $\varphi_2(x) = \Sigma \rho_n^2 e^{2i\omega_n} x^n$ qui s'obtient en associant les deux précédentes. Il en résulte que $\varphi_{-2}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n^2}$ n'a qu'un point singulier (n° 15). En l'associant à $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ on obtient $\varphi_{-1}(x)$ qui n'a qu'un point singulier, ce qui démontre que le point singulier de $\varphi(x)$ est principal.

Comme exemple, on voit que, si les a_n sont réels, si $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier, pour que ce point soit principal il faut et suffit que celui de $\varphi_2(x)$ le soit.

Je ferai encore une remarque. Je suppose que $\varphi(x)$ n'ait qu'un point singulier qui soit principal. Il en est de même de $\varphi_2(x)$, mais $\varphi_2(x)$ possède alors une propriété qui n'est pas démontrée pour $\varphi(x)$: la série obtenue en remplaçant chaque coefficient par son module n'a qu'un point singulier qui est principal et il en est de même de la série $\Sigma e^{2i\theta_n} x^n$ obtenue en divisant chaque coefficient par son module.

17. *Cas particuliers, exemples de points singuliers principaux.* — Les pôles sont des points singuliers principaux [1].

Les séries $\varphi(x) = \Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ où $g(u)$ est holomorphe pour $u = 0$ n'ont que le point singulier 1. Ce point est principal, car la série $\varphi_{-1}(x)$ est de même forme pourvu que $g(0)$ ne soit pas nul. Si $g(0)$ est nul, on peut écrire

$$\frac{1}{g\left(\frac{1}{n}\right)} = n^q \frac{1}{c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots} = n^q \psi\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{avec } c_0 \neq 0.$$

Comme les séries $\Sigma n^q x^n$ et $\Sigma \psi\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ n'ont que le point singulier 1, il en est de même de $\varphi_{-1}(x)$. Donc, même si $g(0) = 0$, le point singulier de $\varphi(x)$ est principal.

On peut aussi former des points singuliers principaux à l'aide des théorèmes du n° 8. Si $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ n'a que le point singulier 1, d'ordre inférieur à 1, la fonction $\Sigma g(a_n) x^n$, où $g(u)$ est holomorphe et non nul pour $u = 0$, n'a que le point singulier 1 qui est principal. Par exemple, $\frac{a}{1-x} + \varphi(x)$ admet le point 1 comme point singulier principal tant que a n'est pas nul.

Il apparaît donc que le fait, pour le point singulier supposé unique de la fonction $\varphi(x)$, d'être ou de n'être pas principal, est en relation avec la façon dont $\varphi(x)$ croît quand x se rapproche du point singulier et la régularité de cette croissance joue peut-être le rôle le plus important.

Il existe, cependant, des fonctions $\varphi(x)$ admettant un seul point

---

[1] Borel, *Sur les singularités des séries de Taylor* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XXVI).

singulier qui est principal et qui n'est pas d'ordre fini. On le démontrera en remarquant que les deux fonctions $\operatorname{ch}(La\sqrt{u})$ et $\frac{\operatorname{sh}(La\sqrt{u})}{\sqrt{u}}$ sont entières et d'ordre inférieur à 1. D'après un théorème de M. Leau, $\Sigma x^n \operatorname{ch}(\sqrt{n}\,La)$ et $\Sigma x^n \frac{\operatorname{sh}(La\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ n'ont, pour toute singularité, que le point essentiel 1.

Il est facile d'en déduire que $\Sigma a^{\sqrt{n}} x^n$ n'a que le point singulier 1 qui est principal, puisque je puis changer a en $\frac{1}{a}$. Ce point n'est pas d'ordre fini pour $\Sigma a^{\sqrt{n}} x^n$ et $\Sigma a^{-\sqrt{n}} x^n$ simultanément, car il serait d'ordre fini pour $\Sigma x^n \operatorname{ch}(\sqrt{n}\,La)$ et l'on sait qu'un point essentiel n'est pas d'ordre fini.

Je signalerai encore les fonctions $\Sigma n^q x^n$, qui n'ont que le point singulier 1 quel que soit q positif ou négatif [1]. Ce point est principal pour toutes ces fonctions.

Enfin, si la fonction $\Sigma e^{i\omega_n} x^n$ (où ω_n est réel) n'a qu'un point singulier, ce point est principal, car $\Sigma e^{-i\omega_n} x^n$ n'en a qu'un aussi (n° **16**). C'est le cas de $\omega_n = \frac{a}{n^\sigma}$ $(\sigma > 0)$ et aussi de $\omega_n = a i \operatorname{L} n$ (n° **12**). Ce dernier exemple donne lieu à une remarque importante : *Si deux fonctions n'ont, l'une et l'autre, pour toute singularité, que le point principal* β, *leur somme n'admet nécessairement pas* β *comme point principal.* Prenons

$$\varphi(x) = \Sigma e^{\frac{2\pi}{\operatorname{L}2} i \operatorname{L} n} x^n, \qquad \psi(x) = \Sigma e^{-\frac{2\pi}{\operatorname{L}2} i \operatorname{L} n} x^n.$$

Alors

$$\varphi(x) - \psi(x) = 2i \Sigma \sin\left(\frac{2\pi}{\operatorname{L}2} \operatorname{L} n\right) x^n$$

et cette série a une infinité de termes nuls, de sorte que son point singulier ne peut être principal.

On peut trouver d'autres fonctions ayant un point singulier unique et principal en combinant celles qui viennent d'être obtenues par l'opération de M. Hadamard.

---

[1] Le Roy, Mémoire cité, p. 339-340. On peut aussi utiliser les résultats du n° **10**.

18. Je vais étudier le cas d'une fonction de la forme

$$\psi(x) = A(1-x)^{-m} + A'(1-x)^{-m'} + A''(1-x)^{-m''} + \ldots,$$

où $m > m' > m'' > \ldots$, où le nombre des termes est fini, les A, A', A'', ... sont des constantes, et les différences $m - m'$, $m - m''$, ... ne sont pas entières.

Une différentiation remplace $\psi(x)$ par une expression de même forme où les exposants $-m$, $-m'$, ... sont tous diminués d'une unité.

D'autre part, le point singulier est simultanément principal ou non principal pour $\psi(x)$ et pour ses dérivées, comme le montre la règle du n° **15**.

On peut donc, sans rien changer au résultat, supposer m positif. Je pose alors

$$h(x) = (1-x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!} x^n,$$

$$h_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{m(m+1)\ldots(m+n-1)} x^n;$$

$h_{-1}(x)$ n'est autre chose que la série hypergéométrique $F(1, 1, m, x)$ qui admet le seul point singulier 1, évidemment principal. Les deux fonctions $\psi(x)$ et $H[\psi, h_{-1}]$ admettent le point 1 simultanément comme point singulier principal ou non principal.

Or, la fonction $H[\psi, h_{-1}]$ peut s'écrire

$$H[\psi, h_{-1}] = \frac{A}{1-x} + \varphi(x),$$

si l'on a posé

$$\varphi(x) = A' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m'(m'+1)\ldots(m'+n-1)\,n!}{n!\,m(m+1)\ldots(m+n-1)} x^n$$

$$+ A'' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m''(m''+1)\ldots(m''+n-1)\,n!}{n!\,m(m+1)\ldots(m+n-1)} x^n$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi(x) = A' F(m', 1, m, x) + A'' F(m'', 1, m, x) + \ldots.$$

Le point singulier 1 de $F(m', 1, m, x)$ est d'ordre égal à $1 + m' - m$, donc inférieur à 1. On obtient le même résultat pour les autres termes

de $\varphi(x)$. D'après le théorème du n° 8, appliqué à la fonction $\varphi(x)$ et au cas où $g(u) = \frac{1}{\Lambda + u}$, le point singulier 1 est principal pour $H[\psi, h_{-1}]$ et, par suite, aussi pour la fonction proposée $\psi(x)$.

19. Nous avons rencontré plusieurs exemples de fonctions

$$\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$$

n'ayant qu'un point singulier qui n'est pas principal. Mais pour toutes ces fonctions, une infinité de coefficients a_n s'évanouissent. On peut se demander s'il est possible de construire une fonction $\varphi(x)$ n'ayant qu'un point singulier non principal et telle que la plus petite limite des $\sqrt[n]{|a_n|}$ ne soit pas nulle. Pour y parvenir, je vais montrer qu'il existe des fonctions $\varphi(x)$ n'ayant qu'un point singulier et telles que la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|a_n|}$ soit différente de zéro et différente aussi de la plus grande des limites; de telles fonctions n'ont pas été signalées, à ma connaissance. Je m'adresserai à des fonctions de la forme $\Sigma \sin(a \mathrm{L} n - \alpha) x^n$ qui ont déjà servi à montrer qu'une fonction peut n'avoir qu'un seul point singulier sans que le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ait une limite [1].

Je pars de la fonction $\varphi(x) = \Sigma \sin\left[\frac{\pi}{\mathrm{L}.2} \mathrm{L}\left(\frac{n}{\gamma}\right)\right] x^n$ qui est de la forme précédente. Je remarque que je ne change pas le module du coefficient général en remplaçant n par $\frac{n}{2^k}$ quel que soit l'entier k. J'ai donc à étudier

$$\sqrt[n]{|\sin \omega_n|} \qquad \text{avec} \qquad \omega_n = \frac{\pi}{\mathrm{L}.2} \mathrm{L}\left(\frac{n}{\gamma . 2^k}\right).$$

J'écris n dans le système de base 2 :

$$n = 2^p + \lambda_n = 2^p + \varepsilon_1 . 2^{p-1} + \varepsilon_2 . 2^{p-2} + \ldots + \varepsilon_p,$$

les ε_i étant égaux à 0 ou à 1, et je prends $k = p$.

Je suppose d'abord p fixe et j'étudie ω_n quand n varie de 2^p à $2^{p+1} - 1$. Alors λ_n varie de 0 à $2^p - 1$. Je prendrai γ compris entre $\sqrt{2}$

---

[1] HADAMARD, *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII, 1892, p. 163.

et $\sqrt[2]{2}$. Dans ces conditions, p restant fixe, $\frac{n}{\gamma 2^p}$ est compris entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{2}{\sqrt[4]{2}}$. L'arc ω_n est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Je cherche la plus petite valeur de n (comprise entre 2^p et $2^{p+1}-1$) pour laquelle $|\sin\omega_n|$ prend la plus petite valeur. J'écrirai :

$$\frac{n}{\gamma . 2^p} = 1 + \frac{1}{\gamma . 2^p}[\lambda_n - (\gamma - 1)\, 2^p];$$

$\gamma - 1$ est ici positif, je le développe en série de puissances de $\frac{1}{2}$,

$$\gamma - 1 = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_p}{2^p} + \ldots,$$

les α étant égaux à 0 ou à 1,

$$\frac{n}{\gamma . 2^p} = 1 + \frac{1}{\gamma . 2^p}\Big[\varepsilon_1 . 2^{p-1} + \varepsilon_2 . 2^{p-2} + \ldots$$
$$+ \varepsilon_p - \alpha_1 . 2^{p-1} - \alpha_2 . 2^{p-2} - \ldots - \alpha_p - \frac{\alpha_{p+1}}{2} - \frac{\alpha_{p+2}}{2^2} + \ldots\Big],$$

la quantité entre crochets est la différence d'un entier positif ou négatif et d'une fraction positive. Elle n'est donc inférieure à 1 que si l'entier

$$E_n = \varepsilon_1 . 2^{p-1} + \varepsilon_2 . 2^{p-2} + \ldots + \varepsilon_p - \alpha_1 . 2^{p-1} - \ldots - \alpha_p = \lambda_n - \alpha_1 . 2^{p-1} - \ldots - a_p$$

est égal à 1 ou à 0. Or, comme λ_n prend toutes les valeurs entières de 0 à $2^p - 1$, comme $\alpha_1 2^{p-1} + \alpha_2 2^{p-2} + \ldots + \alpha_p$ est un nombre compris entre ces limites, le nombre entier E_n prendra une fois la valeur 0 et une fois la valeur 1.

Donc, pour deux valeurs N et N′ de n convenablement choisies, on a

$$\frac{N}{\gamma . 2^p} = 1 + \frac{1}{\gamma . 2^p}\lambda; \qquad \frac{N'}{\gamma . 2^p} = 1 - \frac{1}{\gamma . 2^p}\mu$$

avec

$$0 < \lambda < 1, \qquad 0 < \mu < 1.$$

Pour toute autre valeur de n telle que $2^p \leqq n < 2^{p+1}$, si $\frac{n}{\gamma . 2^p} > 1$, on a

$$\mathrm{L}\frac{n}{\gamma . 2^p} > \mathrm{L}\frac{N}{\gamma . 2^p};$$

si $\frac{n}{\gamma \cdot 2^p} < 1$, on a

$$\left| \mathrm{L} \frac{n}{\gamma \cdot 2^p} \right| > \left| \mathrm{L} \frac{\mathrm{N}'}{\gamma \cdot 2^p} \right|.$$

Les deux valeurs de ω_n correspondant à N et à N′ sont évidemment inférieures à $\frac{\pi}{4}$ en module, dès que p est assez grand. Comme ω_n varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{4}$ la plus petite valeur de $|\sin \omega_n|$ est donc : ou bien

$$\sin\left[\frac{\pi}{\mathrm{L}\,2} \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{\gamma \cdot 2^p} \lambda\right)\right],$$

inférieure à $\sin \omega_n$, si $\frac{n}{\gamma 2^p} > 1$; ou bien

$$\left|\sin\left[\frac{\pi}{\mathrm{L}\,2} \mathrm{L}\left(1 - \frac{1}{\gamma \cdot 2^p} \mu\right)\right]\right|,$$

inférieure à $|\sin \omega_n|$, si $\frac{n}{\gamma 2^p} < 1$.

Cela posé, je choisirai γ de façon que tous les α_r soient nuls, sauf

$$\alpha_{r_1}, \quad \alpha_{r_2}, \quad \ldots, \quad \alpha_{r_q}, \quad \ldots$$

qui sont égaux à 1. Les premiers $r_1, r_2, \ldots, r_q, \ldots$ sont supposés tels que γ soit compris entre $\sqrt[4]{2}$ et $\sqrt{2}$ comme on l'a admis; mais, à partir d'un certain rang, on aura $r_{q+1} = 2^{r_q}$. Je prends maintenant

$$r_q - p < r_{q+1}$$

et, par suite,

$$r_{q+1} - 2^p < r_{q+2}$$

et j'ai alors

$$\frac{\mathrm{N}}{\gamma \cdot 2^p} = 1 + \frac{1}{\gamma \cdot 2^p} \lambda = 1 + \frac{1}{\gamma \cdot 2^p}\left[1 - \frac{1}{2^{r_{q+1}-p}} - \frac{1}{2^{r_{q+2}-p}} - \ldots\right],$$

$$\frac{\mathrm{N}'}{\gamma \cdot 2^p} = 1 - \frac{1}{\gamma \cdot 2^p} \mu = 1 - \frac{1}{\gamma \cdot 2^p}\left[\frac{1}{2^{r_{q+1}-p}} + \frac{1}{2^{r_{q+2}-p}} + \ldots\right].$$

Je vais d'abord démontrer que $\sqrt[n]{|\sin \omega_n|}$ a sa plus petite limite au moins égale à $\frac{1}{2}$. Je suppose d'abord n tel que $\frac{n}{\gamma 2^p} > 1$; $\sin \omega_n$ est positif et supérieur à $\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{L}\,2} \mathrm{L} \frac{\mathrm{N}}{\gamma 2^p}\right)$. Or

$$\frac{\mathrm{N}}{\gamma \cdot 2^p} > 1 - \frac{1}{\gamma \cdot 2^p}\left[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{r_{q+2}-r_{q+1}+1}} - \ldots\right];$$

j'ai en effet remplacé dans le crochet p par $r_{q+1} - 1$, ce qui ne peut que diminuer l'expression. La quantité

$$\frac{1}{2^{r_{q+2}-r_{q+1}+1}} + \frac{1}{2^{r_{q+3}-r_{q+1}+1}} + \ldots$$

est inférieure à son premier terme multiplié par 2. Elle tend vers zéro si q augmente indéfiniment. Dès que q est assez grand, on a donc

$$\frac{N}{\gamma \cdot 2^p} > 1 + \frac{k}{\gamma \cdot 2^p},$$

k étant une constante positive.

Si x vérifie $0 < x < \theta < 1$, θ étant un nombre fixe, on a

$$\sin\left[\frac{\pi}{L.2} L(1+x)\right] > A.x,$$

A étant une constante positive qui ne dépend que de θ.

Donc, dès que n est assez grand, si $\frac{n}{\gamma 2^p} > 1$, $\sin\omega_n$ est supérieur à $\frac{A.k}{\gamma 2^p}$, $\sqrt[n]{\sin\omega_n}$ est supérieur à $\sqrt[n]{\frac{A.k}{\gamma n}}$ dont la limite est 1 si n croît indéfiniment.

Je prends maintenant la deuxième hypothèse $\frac{n}{\gamma 2^p} < 1$. La formule qui donne N′ montre que

$$\frac{1}{\gamma \cdot 2^{p+1}} y = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{2^{r_{q+1}}} + \frac{1}{2^{r_{q+2}}} + \ldots\right] > \frac{1}{\gamma \cdot 2^{r_{q+1}}}.$$

Donc

$$|\sin\omega_n| > \left|\sin\left[\frac{\pi}{L.2} L\left(1 - \frac{1}{\gamma \cdot 2^{r_{q+1}}}\right)\right]\right|.$$

Or, si $0 < x < \theta < 1$, on a

$$\left|\sin\left[\frac{\pi}{L.2} L(1-x)\right]\right| > B.x.$$

B étant une constante positive qui ne dépend que du nombre θ choisi arbitrairement. Donc, dès que n est assez grand,

$$|\sin\omega_n| > \frac{B}{\gamma}\frac{1}{2^{r_{q+1}}} \geqq \frac{B}{\gamma}\frac{1}{2^n}$$

(car $n \leqq 2^{p-r_{q+1}}$).

On voit que $\sqrt[n]{|\sin\omega_n|}$ est dans le cas actuel supérieur à une quantité qui tend vers $\frac{1}{2}$. Il est donc établi que la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|\sin\omega_n|}$ est égale ou supérieure à $\frac{1}{2}$, dans tous les cas. Je vais maintenant montrer qu'elle est inférieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Je prends $p = r_q$. Il existe pour cette valeur de p un entier N que je désignerai maintenant par N_q tel que l'entier correspondant E_{N_q} soit nul. On a d'ailleurs

$$2^{r_q} = N_q < 2 \cdot 2^{r_q}.$$

La valeur correspondante de ω_n est

$$\frac{\pi}{L2} L\left(1 - \frac{N_q}{7 \cdot 2^{r_q}}\right).$$

J'ai

$$\frac{N_q}{7 \cdot 2^{r_q}} = 1 - \frac{1}{7 \cdot 2^{r_q}} \mu = 1 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{r_q+1}} + \frac{1}{2^{r_q+2}} + \ldots\right).$$

La quantité entre parenthèses est inférieure au double de son premier terme

$$\frac{1}{7 \cdot 2^{r_q}} \mu < \frac{2}{7 \cdot 2^{r_q+1}}.$$

Si $0 < x < \theta < 1$ $\left|\sin\frac{\pi}{L2} L(1 - x)\right| < Cx$, C étant une constante. Donc, dès que q est assez grand,

$$|\sin\omega_{N_q}| < \frac{2C}{7} \frac{1}{2^{r_q+1}},$$

$$\sqrt[N_q]{|\sin\omega_{N_q}|} < \sqrt[2 \cdot 2^{r_q}]{\frac{2C}{7} \frac{1}{2^{r_q+1}}}.$$

Or $r_{q+1} = 2^{r_q}$ et l'on voit que la quantité à laquelle nous parvenons a une limite unique égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il y a donc une infinité de valeurs de n pour lesquelles $\sqrt[n]{|\sin\omega_n|}$ a une plus petite limite au plus égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et cela démontre le résultat annoncé.

Le point singulier unique de $\Sigma \sin\omega_n . x^n$ n'est pas principal puisque la plus grande et la plus petite limite de $\sqrt[n]{|\sin\omega_n|}$ sont distinctes, et la plus petite des limites n'est pas nulle.

20. *Points principaux absolus.* — Je rappelle la définition donnée au n° **1**. On dit que $\varphi(x)$ admet le point principal absolu β, si, quel que soit le point singulier γ de la fonction $k(x)$, $H[\varphi, k]$ admet le point singulier $\beta\gamma$, même si $\beta\gamma$ peut être obtenu plusieurs fois. Remarquons que cette propriété dépend non seulement de la nature de la singularité β au voisinage du point β, mais de la fonction $\varphi(x)$ prise dans son ensemble. Il suffit, pour le voir, de supposer $\varphi(x)$ régulier pour $x = -\beta$. Alors $\varphi(x) + \varphi(-x)$ se comporte comme $\varphi(x)$ au voisinage de $x = \beta$ et cependant $H\left[\frac{x}{1-x^2}, \varphi(x) + \varphi(-x)\right] = 0$, de sorte que si β est principal absolu pour $\varphi(x)$, il ne l'est plus pour $\varphi(x) + \varphi(-x)$.

Si $\varphi(x)$ ne possède qu'un point singulier et si ce point est principal, il est aussi principal absolu. D'une manière plus générale, *pour que le point singulier β de $\varphi(x)$ soit principal absolu, il faut et suffit que $\varphi_{-1}(x)$ ne possède que le point singulier $\frac{1}{\beta}$* (¹).

On verra d'abord que $\varphi_{-1}(x)$ existe comme au n° **15**. Si $\varphi_{-1}(x)$ possédait des singularités autres que $\frac{1}{\beta}$, et si β était principal absolu, $H[\varphi, \varphi_{-1}]$ aurait des points singuliers autres que 1, ce qui est impossible.

Réciproquement, si $\varphi(x)$ n'a que le point singulier $\frac{1}{\beta}$, si $k(x)$ admet le point singulier γ, l'égalité

$$H[\varphi_{-1}, H[\varphi, k]] = k(x) \tag{2}$$

montre que $H[\varphi, k]$ admet toujours le point singulier $\beta\gamma$.

Il résulte de notre énoncé qu'une fonction ne peut posséder plus d'un point principal absolu.

Existe-t-il des fonctions admettant plusieurs points singuliers dont l'un est principal absolu? L'exemple du n° **19** montre que l'on peut répondre affirmativement. La fonction $\Sigma \sin \omega_n x^n$ que nous avons construite n'a que le point singulier 1, et la fonction $\sum \frac{x^n}{\sin \omega_n}$ dont le rayon de convergence n'est pas nul en a, à coup sûr, plusieurs, à savoir, des points sur son cercle de convergence, puis le point 1, et

(¹) Je suis redevable de cet énoncé à M. Montel.

d'autres peut-être encore. Le point 1 est pour elle singulier principal absolu.

Si la fonction $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ admet le point principal absolu β, on a une borne inférieure de la plus petite des limites R′ de $\sqrt[n]{|a_n|}$, cette quantité est en effet égale à $\frac{1}{\beta}$.

Je signale plusieurs problèmes qui se posent à propos des points singuliers principaux absolus. Si la fonction $\varphi(x)$ admet le point singulier principal absolu β et d'autres points singuliers, peut-il se faire que β soit sur le cercle de convergence? Peut-il se faire que le cercle de convergence soit coupure essentielle pour la fonction $\varphi(x)$? Peut-il se faire que le cercle de convergence ne soit pas coupure? Il ne paraît pas facile de répondre à ces questions. Par contre, on peut donner une propriété intéressante de la fonction $\varphi(x)$.

21. *Points singuliers principaux non isolés et non séparables.* — Si la fonction $\varphi(x)$ admet le point singulier principal absolu β et d'autres points singuliers, le point β n'est pas séparable. On peut même montrer que les points singuliers de $\varphi(x)$ ne peuvent être *séparés en deux groupes*, je veux dire que l'on ne peut avoir

$$\varphi(x) = \psi(x) + f(x),$$

$\psi(x)$ et $f(x)$ n'étant pas entières et n'ayant pas de point singulier commun. Je suppose qu'il en soit autrement, je suppose que c'est $\psi(x)$ qui admet le point singulier β. Par combinaison avec $\varphi_{-1}(x)$, on a

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{H}[\varphi_{-1}, \psi] = \mathrm{H}[\varphi_{-1}, f].$$

Le premier membre ne peut avoir comme singularités que les points singuliers de $\psi(x)$ multipliés par $\frac{1}{\beta}$, le deuxième que les points singuliers de $f(x)$ multipliés par $\frac{1}{\beta}$. Comme ces points-là sont différents, il faut que les deux membres soient égaux à une fonction entière $\mathrm{G}(x)$.

Alors

$$f(x) = \mathrm{H}[\mathrm{G}, \varphi] = \text{fonction entière},$$

ce qui est en contradiction avec notre hypothèse.

Ce qui précède paraît montrer qu'il existe des relations entre le problème de la recherche des points principaux et le problème qui consisterait à chercher les fonctions dont les singularités ne peuvent être séparées en deux groupes. On peut même aller un peu plus loin et faire la remarque suivante. Soit une fonction $\varphi(x)$ qui possède un point singulier principal absolu β, soit une autre fonction $k(x)$ dont les points singuliers ne peuvent être séparés en deux groupes, la fonction $\mathrm{H}[\varphi, k]$ possède la même propriété. S'il en était autrement, on aurait

$$\mathrm{H}[\varphi, k] = \psi(x) + f(x),$$

$\psi(x)$ et $f(x)$ n'ayant pas de point singulier commun. On en déduirait

$$k(x) = \mathrm{H}[\varphi_{-1}, \psi] + \mathrm{H}[\varphi_{-1}, f],$$

et comme $\varphi_{-1}(x)$ n'a qu'un point singulier, les deux termes du deuxième membre n'ont pas de point singulier commun, ce qui contredit notre supposition relative à $k(x)$.

22. *Remarque au sujet des fonctions qui ont tous leurs points singuliers sur l'axe réel, du côté positif.* — On peut essayer d'étudier certains ensembles de points singuliers, comme nous l'avons fait dans le cas d'un point singulier unique.

Supposons que les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_{-1}(x)$ soient l'une et l'autre régulières partout ailleurs que sur l'axe réel positif. Dans ces conditions, si $k(x)$ admet le point singulier $\varphi e^{i\omega}$, la fonction $\mathrm{H}[\varphi, k]$ admet au moins un point singulier sur la demi-droite dont les points ont pour argument ω. S'il en était autrement, l'équation

$$\mathrm{H}[\varphi_{-1}, \mathrm{H}[\varphi, k]] = k(x) \tag{2}$$

montre que $k(x)$ serait régulière sur la demi-droite d'argument ω.

On verra aussi facilement que, si $\varphi(x)$ est régulière tant que x n'est pas réel et positif, et si $\mathrm{H}[\varphi, k]$ admet toujours au moins un point singulier de même argument que le point singulier quelconque de $k(x)$; alors, $\varphi_{-1}(x)$ a tous ses points singuliers sur l'axe réel.

Ceci se produit pour la fonction

$$\varphi(x) = \sum x^n e^{n[1+\cos(n\theta)]} \qquad (\text{n}^{\circ}\ \mathbf{12}),$$

On remarquera que, si l'on forme $H[\varphi, \varphi_{-1}]$, la singularité $1 \times e^{-2}$ qui provient des deux points singuliers situés sur les cercles de convergence disparaît. Ces points singuliers de l'axe réel ne sont pas séparément principaux, mais leur ensemble possède des propriétés analogues à celles d'un point principal.

TROISIÈME PARTIE.

25. *Étude d'un cas particulier du problème* B. — Les résultats obtenus dans la deuxième Partie permettent de prévoir que, pour aborder dans certains cas le problème que j'ai appelé au n° **1** le problème B, il importera de savoir si les points singuliers de la fonction $\varphi(x)$ sont ou ne sont pas principaux. On verra aussi que le problème est particulièrement simple si $\varphi(x)$ n'a qu'un point singulier sur le cercle de convergence. Nous commencerons par supposer $g(u) = \frac{1}{u}$.

Nous supposerons donc d'abord que $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ n'a, sur son cercle de convergence de rayon R, qu'un point singulier β, que ce point est principal. Je dis que, dans ces conditions, $\varphi_{-1}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n}$ n'a qu'un point singulier sur son cercle de convergence et que $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'a qu'une limite.

On démontrera, comme au n° **15**, que la plus petite des limites R′ de $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'est pas nulle, ce qui permet de supposer sans diminuer la généralité des résultats que $\varphi_{-1}(x)$ existe et qu'aucun des a_n n'est nul. Soit γ un point singulier du cercle de convergence de $\varphi_{-1}(x)$; $\beta\gamma$ est singulier pour $H[\varphi, \varphi_{-1}]$, car il ne peut être obtenu plusieurs fois. Il faut donc que $\beta\gamma = 1$. D'ailleurs, si R′ est la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|a_n|}$, on a

$$RR' = |\beta\gamma| = 1, \qquad R' = \frac{1}{R}.$$

24. Je suppose encore que $\varphi(x)$ n'a que le point singulier β sur le

cercle de convergence, que β est principal et qu'il est isolé : il n'y a pas d'autre point singulier dans un cercle de rayon $R + a$ $(a > 0)$.

Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots$ les autres points singuliers de $\varphi(x)$ qui peuvent d'ailleurs ne pas former un ensemble dénombrable. Soit γ un point singulier quelconque de $\varphi_{-1}(x)$, autre que $\frac{1}{\beta}$ dont on a déjà reconnu l'existence. Nous nous servons toujours de la relation

$$(1) \qquad H[\varphi, \varphi_{-1}] = \frac{1}{1-x}.$$

$\beta\gamma$ doit être obtenu plusieurs fois. Il existe donc un point singulier β_1 de $\varphi(x)$ et un point singulier γ_1 de $\varphi_{-1}(x)$ tels que

$$\beta\gamma = \beta_1\gamma_1; \qquad \beta_1 \neq \beta; \qquad \gamma_1 \neq \gamma.$$

Mais

$$|\beta_1| > |\beta| = R.$$

Donc

$$|\gamma_1| < |\gamma|.$$

Si γ_1 n'est pas $\frac{1}{\beta}$, on démontrera de même qu'il existe un autre point singulier γ_2 de $\varphi_{-1}(x)$ tel que

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{\beta}{\beta_2} = \frac{\gamma\beta^2}{\beta_1\beta_2}.$$

Tant qu'on n'obtient pas $\frac{1}{\beta}$ de cette façon, on pourra continuer et mettre en évidence l'existence de points singuliers

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_p, \quad \ldots \qquad \gamma_p = \gamma \frac{\beta^p}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}.$$

Cette suite est-elle illimitée ? D'après notre hypothèse, les rapports $\frac{\beta}{\beta_1}, \frac{\beta}{\beta_2}, \ldots$ sont inférieurs à $\frac{R}{R+a}$. On a

$$|\gamma_1| < |\gamma| \left(\frac{R}{R+a}\right)^p,$$

et comme $|\gamma_p|$ ne peut devenir inférieur à $\frac{1}{R}$, la suite des γ_p est limitée. L'un d'eux finit par être égal à $\frac{1}{\beta}$, de sorte que tout point singulier γ

de $\varphi_{-1}(x)$ peut s'écrire

$$\gamma = \frac{\beta\,\beta_1\,\ldots\,\beta_n}{\beta^{p+1}}, \tag{3}$$

les $\beta_1, \ldots, \beta_p$ étant des points singuliers de $\varphi(x)$ distincts ou non distincts.

Les valeurs de γ données par la formule (3) correspondent-elles toujours à des points singuliers de $\varphi_{-1}(x)$? Je traiterai d'abord le cas où $\varphi(x)$ ne possède que deux points singuliers tous deux principaux β et β_1. Dans la recherche des points singuliers de $H[\varphi, \varphi_{-1}]$, associons β_1 et $\frac{1}{\beta}$. Comme $\frac{\beta_1}{\beta}$ diffère de 1, il doit disparaître. Il existe donc un point singulier β' de $\varphi(x)$ et un point singulier γ_1 de $\varphi_{-1}(x)$ tels que

$$\frac{\beta_1}{\beta} = \gamma_1\beta', \qquad \beta' = \beta_1.$$

Donc

$$\beta' = \beta; \qquad \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^2}.$$

En associant β_1 et γ_1, on obtient un deuxième point $\gamma_2 = \frac{\beta_1^2}{\beta^3}$ et l'on peut ainsi prouver que $\varphi_{-1}(x)$ admet les points singuliers

$$\frac{1}{\beta}, \quad \frac{\beta_1}{\beta^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\beta^p}{\beta^{p+1}}, \quad \ldots, \tag{4}$$

qui sont tous les points donnés par la formule (3).

Mais, si $\varphi(x)$ admet plus de deux points singuliers, des réductions sont possibles. Pour nous en rendre compte, échangeons le rôle des fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_{-1}(x)$ dont il vient d'être question et admettons que le point $\frac{1}{\beta}$ de $\varphi_{-1}(x)$ soit principal, ce qui sera démontré, dans des cas particuliers, un peu plus loin (n° **25**). On voit, dès lors, qu'une fonction qui a une infinité de points singuliers peut donner naissance à une fonction qui n'en a que deux.

Ce cas se présente d'ailleurs comme exceptionnel par suite de l'existence de relations entre les points singuliers de la suite (4) et il est facile de donner des cas où les valeurs de γ fournies par (3) correspondent à des points singuliers. On peut montrer, par exemple, que,

si β_1, l'un des points $\beta_1, \beta_2, \ldots$, est principal et non supérieur à l'un quelconque des autres, le point $\frac{\beta_1}{\beta^2}$ est bien singulier pour $\varphi_{-1}(x)$.

25. Lorsque, aux hypothèses précédentes, on ajoute la condition que β est séparable, on peut obtenir quelques précisions de plus sur la nature de la singularité de $\varphi_{-1}(x)$ au point $\frac{1}{\beta}$. Je pose

$$\varphi(x) = f(x) + \psi(x),$$

$f(x)$ n'ayant que le point singulier β dans tout le plan et $\psi(x)$ étant régulière en β, de sorte que le rayon de convergence de $\psi(x)$ est supérieur à $R = |\beta|$. J'ai

$$\frac{1}{1-x} = H[f, \varphi_{-1}] + H[\psi, \varphi_{-1}],$$

et, en combinant avec $f_{-1}(x)$ qui n'a que le point singulier $\frac{1}{\beta}$, on a

$$f_{-1}(x) = \varphi_{-1}(x) + H[f_{-1}, H[\varphi_{-1}, \psi]].$$

Le rayon de convergence du deuxième terme du second membre est supérieur à $\frac{1}{R}$. On voit donc que $\varphi_{-1}(x) - f_{-1}(x)$ est régulière pour $\frac{1}{\beta}$, ce qui revient à dire que $\varphi_{-1}(x)$ admet le point singulier $\frac{1}{\beta}$ comme point singulier séparable et par suite aussi, principal, puisque la partie irrégulière est $f_{-1}(x)$.

On voit immédiatement que si β est pôle simple, $\frac{1}{\beta}$ est pôle simple pour $\varphi_{-1}(x)$. Si β est pôle d'ordre p de $\varphi(x)$, on voit que $\frac{1}{\beta}$ ne saurait être un pôle pour $\varphi_{-1}(x)$. Si ce point était un pôle d'ordre q, $H[f, f_{-1}]$ admettrait le point 1 comme pôle d'ordre [1] $p + q - 1$ et l'on ne peut avoir $p + q - 1 = 1$ si $p > 1$. Si par exemple

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

on a

$$\varphi_{-1}(x) = x\,\mathrm{L}(1-x).$$

---

[1] Borel, *Sur les singularités des séries de Taylor* (*Bul. Soc. math. de France*, t. XXVI, p. 338).

26. *Étude d'un problème plus général.* — Des considérations analogues aux précédentes permettent de généraliser les résultats du n° **8**. *Je suppose que la fonction* $\varphi(x) = \Sigma' b_n x^n$ *n'admette sur son cercle de convergence de rayon* 1 *que le point singulier* 1, *d'ordre inférieur à* 1, *séparable et isolé.* C'est dire que l'on a

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \psi(x) \qquad \left(\text{et je pose } \varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right).$$

$\varphi_1(x)$ n'ayant que le point singulier 1 tel que $(1-x)^q \varphi_1(x)$ ait un module borné pour x voisin de 1, q étant inférieur à 1. Le rayon de convergence de $\psi(x)$ est supposé supérieur à 1. Je le désignerai par r. Je cherche à traiter le problème B pour la fonction $\varphi(x)$ et je commence par l'étude de la fonction

$$Q(x, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{u - b_n},$$

en supposant u différent de zéro, des b_n et aussi des a_n. Les résultats du n° **26** nous renseignent sur les points singuliers de $Q(x, u)$ considérée comme fonction de x, puisque $\Sigma(u - b_n)x^n$ n'a que le point singulier 1 sur son cercle de convergence, que la partie irrégulière pour $x = 1$ est $\Sigma(u - a_n)x^n$ et que, d'après les résultats du n° **8**, le point 1 est principal pour cette fonction tant que u n'est ni nul, ni égal à l'un des a_n. Il importe d'aller plus loin et de chercher une borne de $Q(x, u)$ comme on l'a fait à plusieurs reprises. Je pose

$$\Phi(x, u) = \sum \frac{x^n}{u - a_n},$$

et je remarque que cette fonction est bien celle qui a été étudiée sous le même nom au n° **8**. J'ai

$$H\left[Q(x, u), \frac{u}{1-x} - \varphi_1(x) - \psi(x)\right] = \frac{1}{1-x},$$

$$H\left[Q(x, u), \frac{u}{1-x} - \varphi_1(x)\right] = \frac{1}{1-x} + H[Q, \psi],$$

et, en combinant avec $\Phi(x, u)$,

$$Q(x, u) = \Phi(x, u) + H[Q, H[\Phi, \psi]]. \tag{5}$$

Je pose

$$\Phi_2 = H[\Phi, \Phi]; \qquad \Phi_3 = H[\Phi_2, \Phi]; \qquad \ldots;$$
$$\psi_2 = H[\psi, \psi]; \qquad \psi_3 = H[\psi_2, \psi]; \qquad \ldots.$$

Je remplace, dans le deuxième membre de (5), $Q(x, u)$ par l'expression que nous en fournit l'équation (5) elle-même et je répète $(p-1)$ fois cette transformation. J'obtiens :

$$(6) \qquad Q = \Phi + H[\Phi_2, \psi] + H[\Phi_3, \psi_2] + \ldots + H[\Phi_p, \psi_{p-1}] + H[Q, H[\Phi_p, \psi_p]].$$

Le rayon de convergence de $H[Q, H[\Phi_p, \psi_p]]$ est au moins égal à r^p, d'autre part, $\Phi, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ n'ont que le point singulier 1. L'équation (6) montre donc que les points singuliers de $Q(x, u)$ autres que 1 et de module inférieur à r^p sont les mêmes que ceux de $\psi, \psi_2, \ldots, \psi_{p-1}$ et ceci coïncide bien avec le résultat obtenu autrement (n° **24**).

Soit maintenant D_p un domaine contenu à l'intérieur du cercle de rayon r^p et de centre origine; D_p ayant pour frontière une courbe Γ simplement connexe, laissant à l'extérieur les points singuliers de $Q(x, u)$, contenant l'origine à l'intérieur. Soit, d'autre part, une courbe simple σ du plan des u, contenant à son intérieur tous les a_n, tous les b_n, ainsi que leur unique point limite, l'origine O. Si x est dans D_p (ou sur Γ) et u sur σ, $\Phi(x, u)$ admet une borne indépendante de x et u (n° **8**). Il est possible d'en déduire une borne pour

$$\Phi_2(x, u) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \Phi(z, u)\, \Phi\left(\frac{x}{z}, u\right) \frac{dz}{z},$$

pourvu que x soit intérieur à un domaine Δ_1 quelconque intérieur à D_p, sans point commun avec Γ. L'intégrale de Parseval précédente donne bien en effet $\Phi_2(x, u)$ dans ces conditions puisque Γ contient le point x à son intérieur et laisse le point 1 à l'extérieur. $\Phi(z, u)$ admet une borne indépendante de x et de u dans les conditions indiquées. $\frac{u}{z}$ décrit un domaine qui laisse le point 1 à son intérieur quand x est dans Δ_1 et z sur Γ, $\Phi\left(\frac{x}{z}, u\right)$ est donc borné quand $\frac{x}{z}$ est dans ce domaine et u sur σ; l'existence d'une borne pour $\Phi_2(x, u)$ est donc démontrée.

On trouverait de même une borne indépendante de x et de u pour

$\Phi_3(x, u)$ quand u est sur σ et x dans un domaine Δ_2 intérieur à Δ_1, sans point commun avec la frontière de Δ_1 (Δ_2 est encore supposé simplement connexe et il contient l'origine). On peut continuer ainsi jusqu'à $\Phi_p(x, u)$. Finalement, étant donné un domaine Δ_{p-1} intérieur à D_p, mais qui, p étant donné, peut être pris aussi voisin de D_p qu'on le voudra pourvu qu'il n'ait aucun point commun avec la frontière de D_p, les fonctions $\Phi, \Phi_2, \ldots, \Phi_{p-1}$ admettent des bornes qui ne dépendent ni de u (supposé sur σ), ni de x (supposé dans Δ_{p-1}).

Les fonctions $\psi(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_{p-1}(x)$, qui ne dépendent pas de u, sont régulières dans Δ_p, elles y admettent des bornes. Il est facile d'en déduire, par un procédé analogue au précédent, que $H[\Phi_2, \psi]$, $H[\Phi_3, \psi_2]$, ... admettent des bornes dans un domaine Δ_p intérieur à Δ_{p-1} aussi voisin de lui (et par suite aussi de D_p) qu'on le veut et sans point commun avec sa frontière, ces bornes ne dépendant encore ni de x, ni de u.

Enfin la série

$$H[Q, H[\Phi_p, \psi_p]] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (b_n - a_n)^p}{(u - a_n)^p (u - b_n)}$$

est convergente dans Δ_p puisque Δ_p et D_p sont intérieurs au cercle de rayon r^p et que la plus grande des limites de $\sqrt[n]{|b_n - a_n|}$ est r^{-1}.

Comme la courbe σ contient à son intérieur les a_n et les b_n, on a

$$\left| \frac{1}{(u - a_n)^p (u - b_n)} \right| < M,$$

M étant une borne indépendante de u (situé sur σ) et de n.

On peut trouver ε tel que si x est dans Δ_p, $|x| < r_p - \varepsilon$. Alors

$$|H[Q, H[\Phi_p, \psi_p]]| < M \sum_{n=0}^{\infty} |r^p - \varepsilon|^n |b_n - a_n|^p,$$

et le deuxième membre est une borne du premier, borne indépendante de u et de x.

De cette discussion il résulte que $Q(x, u)$ admet une borne, si x est dans Δ_p et u sur σ, puisqu'il en est ainsi des différents termes du deuxième membre de l'équation (6).

Δ_p peut contenir tout point du domaine intérieur au cercle de centre

origine, de rayon r_p autre que les points singuliers de $\psi, \psi_2, \ldots, \psi_{p-1}$. On en déduira comme on l'a fait déjà plusieurs fois que si $g(u)$ *est fonction holomorphe pour* $u = 0$ (*donc aussi pour* $u = b^n$ *qui tend vers zéro si* u *croît indéfiniment*), *sous les autres conditions énoncées plus haut,* $\Sigma g(b_n)x^n$ *n'a d'autres points singuliers que les points donnés par*

$$\gamma = \beta_1\beta_2\ldots\beta_n,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ *étant des points singuliers de* $\varphi(x)$ *autres que* 1 *et qui ne sont pas nécessairement distincts.* Ce résultat s'applique en particulier si 1 est point régulier de $\varphi(x)$ et si $\varphi(x)$ a son rayon de convergence supérieur à 1. On peut en effet, sans rien changer aux démonstrations, supposer que les a_n sont nuls et que $\Phi(x, u) = \frac{1}{u}\frac{1}{1-x}$. *Le problème* B *est donc particulièrement simple si les points singuliers de* $\varphi(x)$ *sont tous extérieurs au cercle de rayon* 1 *et si* $g(u)$ *est holomorphe à l'origine,* ce dernier résultat a été énoncé par M. Desaints [1].

27. *Cas où la fonction donnée a deux points sur le cercle de convergence.* — Je me bornerai, afin de mettre en évidence les difficultés qui se présentent dans ce cas, à démontrer la propriété suivante : *Si la fonction* $\varphi(x) = \Sigma a_n x^n$ *n'a, sur le cercle de convergence, que deux points singuliers* β *et* β_1 *tous deux principaux, si le rapport* $s = \frac{\beta}{\beta_1}$ *n'est pas racine de l'unité, la fonction* $\varphi_{-1}(x) = \sum \frac{x^n}{a_n}$ *admet son cercle de convergence comme coupure.* (On suppose que la plus petite des limites R′ de $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'est pas nulle.)

Je suppose d'abord R′ inférieur à la plus grande des limites $\frac{1}{R}$ de $\sqrt[n]{|a_n|}$. Soit γ un point singulier de $\varphi_{-1}(x)$ tel que $|\gamma| = R'$; $\beta\gamma$ ne peut être égal à 1, il doit donc disparaître dans $H[\varphi, \varphi_{-1}]$. Il existe un point singulier γ' de $\varphi_{-1}(x)$ et un point singulier β' de $\varphi(x)$ tels que $\beta\gamma = \beta'\gamma'$. Les modules des deux membres ne peuvent être égaux que si β' et γ' sont sur les cercles de convergence respectifs des deux fonctions, β' n'est donc autre que β_1. Il existe donc sur le cercle de convergence de $\varphi_{-1}(x)$ le point singulier $\gamma' = \gamma s$. On verra de même qu'il y

[1] Desaints, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1902.

à $\gamma s^2, \gamma s^3, \ldots$; l'ensemble de ces points est dense sur tout le cercle qui est coupure essentielle. (On remarquera que cette démonstration suppose seulement β principal, β_1 peut ne pas l'être.)

Supposons maintenant $R' = \frac{1}{R}$. Il y a un point singulier γ de $\varphi_{-1}(x)$ et un point singulier de $\varphi(x)$ dont le produit est 1, mais le produit des deux rayons de convergence R et R' étant 1, ceci ne peut avoir lieu que si les deux points en question sont sur le cercle de convergence qui leur correspond. Le point singulier de $\varphi(x)$ est donc β ou β_1, supposons par exemple que ce soit β. En associant $\frac{1}{\beta}$ de $\varphi_{-1}(x)$ à β_1 de $\varphi(x)$, on démontre l'existence d'un point singulier $\gamma' = \frac{\beta_1}{\beta_2}$ de $\varphi(x)$ et l'on achève comme précédemment [1].

Cette proposition montre la difficulté à laquelle on se heurte si l'on cherche à traiter le problème B dans un cas analogue à celui du n° 8, en supposant que le point singulier n'est plus 1, mais un point de module 1 : $\Phi(x, u)$ peut alors admettre son cercle de convergence comme coupure.

28. Je terminerai par l'étude de la fonction $\varphi_{-1}(x)$ lorsque x possède sur son cercle de convergence deux points β et β_1 tels que $s = \frac{\beta_1}{\beta}$ soit racine de l'unité. La méthode précédente ne donne pas de résultat : nous devrons appliquer des hypothèses plus restrictives, les points β et β_1 seront supposés séparables.

Je suppose donc que l'on ait

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) + k(x) = \Sigma a_n x^n,$$

$f(x)$ n'ayant que le point β, $g(x)$ n'ayant que le point singulier β_1. Ces deux points sont supposés principaux. On a $|\beta| = |\beta_1| = R$ et le rayon de convergence de $k(x)$ est supérieur à R, $s = \frac{\beta_1}{\beta}$ est la racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'a que la limite $\frac{1}{R}$ et enfin une autre condition sera indiquée plus loin.

---

[1] Des exemples du cas précédent sont bien connus et utilisés pour former des fonctions simples ayant leur cercle de convergence comme coupure : GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 248 (2e édition).

Nous partirons de la relation suivante :

$$\mathrm{H}[f, \varphi_{-1}] + \mathrm{H}[g, \varphi_{-1}] = \frac{1}{1-x} + \xi(x).$$

$\xi(x)$ désignant $-\mathrm{H}[k, \varphi_{-1}]$ dont le rayon de convergence est supérieur à 1.

Je combine les deux membres de l'égalité précédente avec $f_{-1}(x)$ et je pose

$$q(x) = \mathrm{H}[g, f_{-1}]; \qquad \psi(x) = \mathrm{H}[\xi, f_{-1}].$$

J'obtiens

$$\varphi_{-1}(x) + \mathrm{H}[\varphi_{-1}, q] = f_{-1}(x) + \psi(x), \tag{7}$$

$q(x)$ a pour point singulier s, $\psi(x)$ a un rayon de convergence supérieur à $\frac{1}{\mathrm{R}}$.

Je combine ensuite $p-1$ fois les deux membres de l'équation (7) avec $q(x)$. Je pose

$$\mathrm{H}[q, q] = q_2; \qquad \mathrm{H}[q_2, q] = q_3; \qquad \ldots.$$

J'ai ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}[\varphi_{-1}, q] + \mathrm{H}[\varphi_{-1}, q_2] = \mathrm{H}[f_{-1}, q] + \mathrm{H}[\psi, q], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{H}[\varphi_{-1}, q_{p-1}] + \mathrm{H}[\varphi_{-1}, q_p] = \mathrm{H}[f_{-1}, q_{p-1}] + \mathrm{H}[\psi, q_{p-1}]. \end{array}\right. \tag{8}$$

J'ajoute ensuite membre à membre les équations (7) et (8), après avoir multiplié les termes de la $i^{\text{ème}}$ par $(-1)^{i-1}$:

$$\begin{aligned} &\varphi_{-1} + (-1)^{p-1}\mathrm{H}[\varphi_{-1}, q_p] \\ &\quad = f_{-1} - \mathrm{H}[f_{-1}, q - q_2 + \ldots \pm q_{p-1}] - \psi - \mathrm{H}[\psi, q - q_2 + \ldots \pm q_{p-1}]. \end{aligned} \tag{9}$$

Je pose

$$\theta(x) = \frac{1}{1-x} + (-1)^{p-1} q_p(x)$$

et je suppose que le point singulier 1 de $\theta(x)$ soit principal, ce qui, d'après les résultats du n° 8, a lieu dans le cas où le point singulier 1 de $q_p(x)$ est d'ordre inférieur à 1 et dans bien d'autres cas usuels. On voit alors que les points singuliers de $\varphi_{-1}(x)$ sont les mêmes que ceux du premier membre de l'équation (9) et, par suite, aussi que ceux du deuxième membre. Ce sont donc ceux de $q - q_2 + \ldots \pm q_{p-1}$ combinés

avec le point $\frac{1}{\beta}$ de $f_{-1}(x)$ ou avec les points singuliers de $\psi(x)$ qui dépendent de ceux de $k(x)$ et qui sont de module supérieur à $\frac{1}{R}$. En particulier, les points singuliers du cercle de convergence de $\varphi_{-1}(x)$ ne peuvent être que $\frac{1}{\beta}, \frac{s}{\beta}, \frac{s_2}{\beta}, \ldots, \frac{s^{p+1}}{\beta}$. Le cercle de convergence n'est donc plus coupure.

Les restrictions que nous avons adoptées pour traiter le cas actuel sont bien essentielles. Si, par exemple, on ne suppose pas que $\sqrt[i]{|a_n|}$ n'a qu'une limite, le résultat ne subsiste plus nécessairement.

Soit $\varphi(x) = \frac{x}{1-x^2} + k(x)$, $k(x)$ ayant un rayon de convergence R supérieur à 1. Posons $k(x) = \Sigma b_n x^n$,

$$\varphi_{-1}(x) = \sum \left(\frac{x^{2n}}{b_{2n}} + \frac{x^{2n+1}}{1 + b_{2n+1}} \right).$$

Le rayon de convergence est le même que celui de $\sum \frac{x^{2n}}{b_{2n}}$ au plus égal à $\frac{1}{R}$ et les points singuliers du cercle de convergence dépendent de ceux de $k(x)$; ils peuvent être quelconques.

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS, STRASBOURG, 1920.

SECTION III. — PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

The uniaxial potential function (fonction de potentiel) and its orthogonal force function (fonction de force) contrasted;

PAR G. GREENHILL.

1. To recall the notation, a potential function (P. F.) V satisfies Laplace's equation, and this for uniaxial symmetry about the axis Ox can be written.

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dx}\left(y\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dx}\left(y\frac{dV}{dy}\right)=0.$$

Then a function S exists, which we shall call the force function (F.F.) such that

$$\text{(1)} \qquad \frac{dS}{dx}=+y\frac{dV}{dy}, \qquad \frac{dS}{dy}=-y\frac{dV}{dx};$$

and meridian sections of the surface V and S constant are orthogonal curves. Then conversely

$$\text{(2)} \qquad \frac{dV}{dy}=\frac{1}{y}\frac{dS}{dx}, \qquad \frac{dV}{dx}=-\frac{1}{y}\frac{dS}{dy},$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\frac{dS}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\frac{dS}{dy}\right)=0,$$

analogous to Laplace's equation (A).

Maxwell introduces a factor 2π, which may be inserted when required for a comparison of results.

To standardise the notation, we prefer to use the ordinary Cartesian x and y coordinates, instead of Maxwell's (b, A), or the (ρ, z) or (ϖ, z) columnar coordinates: and ϖ today is a Greek letter not in use by the printer. But we shall often require in the sequel to change to the notation of Maxwell.

The name Force-Function has been introduced after consideration, and it is submitted to this Congress for its sanction and approval.

And Professor Tait of Edinburg, in his *Dynamics of a Particle*, Chapter II, speaks scornfully of « the unnatural force-function, which disfigures most of the analytical treatises on our subject of Dynamics », still however in use in Germany. Tait meaning that he intends to substitute the name potential function.

So we may be allowed to rescue the discarded name, and give it this new signification, as representing a function constant along a line of force.

Some writers call it the Stream or Current Function, from its hydrodynamical interpretation; others call it the Stokes Function, because Stokes is supposed to be the first to have employed it. But there is always the difficulty of rival claims to be considered, when a man's name is given to a mathematical function.

In many cases where the P. F. V is a complicated function, or given by an intractable integral, it is, found that S the F. F. assumes a form of greater simplicity; a list of some such cases is given herewith in the sequel.

The calculation of the P. F. can be made according to a definite procedure of integration, when the method of dissection has been selected.

But there does not appear to be any similar straight-forward method of integration for the F. F.; the form of the F. F. S is to be inferred from (1), and thence by the partial integration which lead to a result.

2. Thus the P. F. of an electrified lens is given by Professor H. M. Macdonald in the *Proceedings of the London Mathematical Society* (*L. M. S.*), XXVI, in the form

$$V = \pi - C + D, \tag{1}$$

where

$$(2) \qquad D = \int_u^x \sqrt{\left(\frac{\operatorname{ch} u - \cos v}{\operatorname{ch} \zeta - \operatorname{ch} u}\right)} \frac{\operatorname{sh} f\zeta \, f d\zeta}{\operatorname{ch} f\zeta - \cos f(v + 2\beta)},$$

and C is derived from D by putting $\beta = 0$; as this V will be found to satisfy Laplace's equation (A) and over the spherical surface $v = -\beta$, and $v = \alpha - \beta$, $C = D$, $V = \pi$, with $f\alpha = \pi$.

The coordinates (u, v) employed here are the conjugate functions in the stereographic conformal representation.

$$(3) \qquad x + iy = a \cot \tfrac{1}{2}(v + iu)$$

and then Laplace's equation (A) becomes

$$(A') \qquad \frac{d}{du}\left(y \frac{dV}{du}\right) + \frac{d}{du}\left(y \frac{dV}{dv}\right) = 0,$$

as well as for any other conformal representation of conjugate functions

$$(4) \qquad x + iy = f(v + iu).$$

But the determination of the F. F. terms A and B, corresponding to C or D, was a matter of guess work for the most part, when it was found that

$$(5) \qquad B = a \int \sqrt{\left(\frac{\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch} u}{\operatorname{ch} u - \cos v}\right)} \frac{\sin v}{\operatorname{ch}\zeta - \cos v} \frac{\operatorname{sh} f\zeta . f d\zeta}{\operatorname{ch} f\zeta - \cos f(v + 2\beta)}$$
$$a \int \sqrt{\left(\frac{\operatorname{ch} u - \cos v}{\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch} u}\right)} \frac{\operatorname{sh}\zeta}{\operatorname{ch}\zeta - \cos v} \frac{\sin f(v + 2\beta) f d\zeta}{\operatorname{ch} f\zeta - \cos f(v + 2\beta)},$$

and A is derived from B by putting $\beta = 0$.

With these values it can be verified that

$$(6) \qquad \frac{a}{y}\frac{dB}{du} + \frac{dD}{dv} = 0, \qquad \frac{a}{y}\frac{dB}{dv} - \frac{dD}{du} = 0, \qquad \frac{y}{a} = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos v},$$

and the same with A and C, as required (*Proceedings of the Royal Society*, vol. 98, 1920).

3. Begin by the consideration of the electrical potential of a circular disc AB with axis Ox; this is given by

$$\omega = \sin^{-1}\frac{AB}{AP + PB} \tag{1}$$

making $\omega = \frac{1}{2}\pi$ over the disc, and $\omega = 0$ at infinity.

But the corresponding F. F. is an algebraical function

$$A = \tfrac{1}{2}\sqrt{[AB^2 - (AP - PB)^2]} = \sqrt{(AP.PB)}\sin\tfrac{1}{2}APB = x\tang\omega, \tag{2}$$

so that A is the semi-conjugate axis of the confocal hyperbola though P, while $\sin\omega$ is the excentricity of the confocal ellipse, foci at A and B; and the meridian sections of constant ω and A are confocal ellipses and hyperbolas.

The charge induced in the disc, if to earth, by a point charge q at P is given by $-q\dfrac{\omega}{\frac{1}{2}\pi}$.

On the conformal representation of this confocal system

$$y + ix = a\,\mathrm{ch}(\eta + i\xi), \tag{3}$$

$$AP,\ PB = a(\mathrm{ch}\,\eta \pm \cos\xi), \tag{4}$$

$$\sin\omega = \mathrm{sech}\,\eta, \qquad A = a\sin\xi. \tag{5}$$

More generally then, any oblate spheroid of which AB is the focal circle, insulated and electrified with a charge E, will have a P. F. V, F. F. S and electrical density σ, such that

$$\left\{\begin{aligned} V &= \frac{2E}{AB}\sin^{-1}\frac{AB}{AP + PB}, \qquad S = E\sqrt{\left[1 - \left(\frac{AP - PB}{AB}\right)^2\right]}, \\ 4\pi\sigma &= \frac{E}{\frac{1}{2}(AP + PB)\sqrt{(AP.PB)}}; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

and this verifies at infinity, where

$$V \to \frac{2E}{AB}\sin^{-1}\frac{AB}{2OP} \to \frac{E}{OP}. \tag{7}$$

The analogous expression of

$$(8)\quad \begin{cases} \omega_1 = \mathrm{ch}^{-1}\dfrac{AB}{AP-PB}, \\ \Lambda_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{[(AP+PB)^2 - AB^2]} = \sqrt{(AP.PB)}\cos\dfrac{1}{2}APB = x\coth\omega_1 \end{cases}$$

would apply to an infinite electrified plate, from which a circular hole AB had been cut out [*American Mathematical Journal* (*A. M. J.*), oct. 1917, p. 346, *Phil. Trans.*, 1891, The Stokes Function, R. A. Sampson].

4. With Oy in the axis of revolution and in any system of conformal representation by conjugate functions, (A) and (B) in § **1** can be replaced, as in (A′), § **2**, by

$$(C)\qquad \frac{d}{du}\left(x\frac{dV}{du}\right) + \frac{d}{dv}\left(x\frac{dV}{dv}\right) = 0,$$

$$(D)\qquad \frac{d}{du}\left(\frac{1}{x}\frac{dS}{du}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{x}\frac{dS}{du}\right) = 0.$$

At a great distance from the axis Oy, where the variation of x is insensible, these equations reduce to the ordinary equations of two conjugate functions, V and S.

Then for a rod AB in Oy, or a confocal prolate spheroid, with electric charge E.

$$(1)\quad V = \frac{2E}{AB}\mathrm{th}^{-1}\frac{AB}{AP+PB},\quad S = E(AP-PB),\quad 4\pi\sigma = \frac{E}{\frac{1}{2}(AP+PB)\sqrt{(AP.PB)}}.$$

The line P. F. of the rod AB with AP, BP $= r_1, r_2$, is obtained from the integral

$$(2)\quad \int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{[x^2+(y-y)^2]}} = \mathrm{sh}^{-1}\frac{y+a}{x} - \mathrm{sh}^{-1}\frac{y-a}{x} = \mathrm{ch}^{-1}\frac{r_1}{x} - \mathrm{ch}^{-1}\frac{r_2}{x}$$

$$= \mathrm{sh}^{-1}\frac{a(r_1+r_2) - y(r_1-r_2)}{x^2} - \mathrm{ch}^{-1}\frac{r_1r_2 - y^2 + a^2}{x^2}$$

$$= 2\,\mathrm{th}^{-1}\sqrt{\left(\frac{r_1r_2 - x^2 - y^2 - a^2}{r_1r_2 + x^2 - y^2 - a^2}\right)} = 2\,\mathrm{th}^{-1}\frac{2a}{r_1 + r_2} - 2\,\mathrm{th}^{-1}\frac{2y}{r_1 - r_2},$$

and this is infinite along AB.

The separate terms,

$$(3) \qquad V = \mathrm{sh}^{-1}\frac{y+a}{x} = \mathrm{ch}^{-1}\frac{r_1}{a}, \qquad S = r_1$$

give the V and S for a positive semi-infinite rod Ay, and negative road Ay'.

With the break at O, and $a = 0$

$$(4) \qquad V = \mathrm{sh}^{-1}\frac{y}{x} = \mathrm{ch}^{-1}\frac{r}{x} = \mathrm{th}^{-1}\frac{y}{r}, \qquad S = r = \mathrm{OP},$$

and the stream sheets for the corresponding streaming motion are spherical and of uniform thickness, the flow issuing from a pole and disappearing at the other pole, with velocity elsewhere inversely as the distance from the axis.

The single line source Oy would have

$$(5) \quad V = \mathrm{th}^{-1}\frac{y}{r} + \log x = \frac{1}{2}\log\frac{r+y}{r-y} + \log x = \log(r+y), \qquad S = r - y,$$

and sections of constant V and S are confocal parabolas, with focus at O (*A. J. M.*, XXXIX, p. 356).

Take the case of a spherical vessel, with a source A and a sink B, at opposite ends of a diameter AB; the F. F. or stream function.

$$(6) \qquad S = \frac{AN}{AP} + \frac{NB}{PB} - \frac{AP + PB}{AB},$$

makes $S = 0$ over the surface, $S = 1$ along AB, so that the flow is 2π.

But the expression for the P. F. V. is more complicated

$$(7) \qquad V = \frac{1}{AP} - \frac{1}{PB} - \frac{2}{AB} + \mathrm{th}^{-1}\frac{AB}{AP + PB}.$$

3. In the electrical distribution σ over an equipotential,

$$(1) \qquad 4\pi\sigma = F = -\frac{dV}{dn} = \frac{1}{y}\frac{dS}{ds},$$

where dn, ds denote the element of the normal and arc of the meri-

dian of the equipotential V :

$$(2)\qquad \frac{dS}{ds} = 4\pi\sigma y\, ds, \qquad \frac{1}{2}(S_1 - S_2) = \int 2\pi\sigma y\, ds,$$

and this is the charge or electric induction through the zone on the equipotential.

Thence the charge or capacity is inferred from the half difference of the extreme values of the F. F. S.

For the insulated bowl, of radius c, electrified to potential π,

$$(3)\qquad V = \pi - \omega + \frac{c}{r}\omega',$$

$$(4)\qquad S = A = c\omega - c\omega' \cos\varphi.$$

But for the gravitation potential U of the bowl, of uniform superficial density σ, g/cm²,

$$(5)\qquad \frac{U}{G\sigma} = c\Omega + r'\Omega',$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{S}{G\sigma} &= ac\,P + A\,c\,Q + c^2\Omega\cos\gamma + c^2\Omega'\cos\varphi \\ &= -\frac{cW}{G\sigma} + \frac{U}{G\sigma} r\cos\varphi, \end{aligned}$$

as in the *American Journal of Mathematics* (*A. J. M.*), t. XXXIII, p. 391, W denoting the P. F. of the plate on AB.

Here Ω is the solid or conical angle subtended at P by the circle on AB, and Ω' the solid angle subtended at P′, inverse point of P in the sphere or bowl.

The gravitation P. F. and F. F. has been worked out in the *A. J. M.*, 1910, t. XXXIII, p. 394, for a homogeneous plano convex lens, and thence, by addition or subtraction, for a double convex, or concavo-convex lens.

The converse process on p. 399 of deriving the plano-convex lens is troublesome, in leading to an indeterminate form.

6. The electrical problem of a point charge q at Q in the presence of a conducting sphere to earth and of the electrification induced, is at the root of the method of inversion.

The potential over the sphere is reduced to zero if a point charge $-q'$ is introduced at Q′, inverse point in the sphere of the point Q, adjusted so that at any point P of the sphere

$$(1) \qquad \frac{q}{PQ} - \frac{q}{PQ} = 0.$$

Then if PA, PB are the bisectors, internal and external, of the angle OPQ′

$$(2) \qquad \frac{q'}{q} = \frac{PQ'}{PQ} = \frac{Q'A}{QA} = \frac{Q'B}{QB} = \frac{O'Q'}{OA} = \frac{OA}{OQ} = \sqrt{\frac{OQ'}{OQ}};$$

APB is a right angle, and OQP, OPQ′ are similar triangles, with

$$OQP = OPQ' = \theta, \qquad OQ'P = OPQ' = \theta',$$

$$(3) \qquad \frac{q'}{q} = \frac{PQ'}{PQ} = \frac{OP}{OQ} = \sqrt{\frac{OQ'}{OQ}},$$

so that the capacity of the point images at Q, Q′ may be taken as proportional to the square root of OQ, OQ′.

The resultant force F at P is then along the radius PO, and estimated in the direction to the inside of the sphere

$$(4) \qquad F = \frac{q' \cos\theta}{PQ'^2} - \frac{q \cos\theta'}{PQ^2} = \frac{q}{PQ^2}\left(\frac{OQ}{OP}\cos\theta - \cos\theta'\right),$$

$$(5) \qquad OQ \cos\theta - OP \cos\theta' = QR - PR = QP = \frac{OQ^2 - OA^2}{QP},$$

$$(6) \qquad F = q\frac{OQ^2 - OA^2}{OA \cdot PQ^3} = q\frac{OP^2}{OA \cdot PQ^3} = q\frac{OQ \cdot OQ'}{OA \cdot PQ^2},$$

varying inversely as the cube of PQ.

Put $F = 4\pi\sigma$, and σ is the density, electric or gravitation, of a surface film, like a coat of paint, to make a centrobaric shell, attracting external points as if concentrated into the image Q′.

7. Suppose a succession of electrified Q points outside the sphere to make a ring; the series of Q′ images will make another ring, and the electrical field outside the sphere, if uninsulated, is due to these two rings.

Let the Q ring for instance be a circle on diameter AB, presented

directly to the sphere, and charged with C coulombs of electricity.

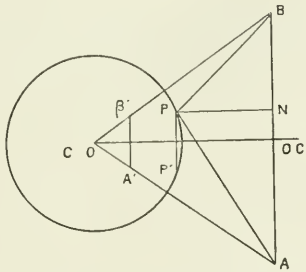
The electrical density $\Delta\sigma$ at a point P on the sphere induced by the charge $q = C\frac{d\theta}{2\pi}$ at Q is given by

$$(1) \qquad \Delta\sigma = C\frac{d\theta}{2\pi}\frac{OA^2 - OP^2}{4\pi . OP . PQ^3} = \frac{C\,d\theta}{8\pi^2}\frac{OA^2 - OP^2}{OP . PD}\frac{\cos QPN}{PQ^2},$$

if PN is the perpendicular on the plane AB of the circle, and this is the component attraction on P of the q particle at Q perpendicular to the plane AB, multiplied by $\frac{OA^2 - OP^2}{4\pi . OP . PN}$.

The total σ induced at P will be the same multiple of the attraction

Fig. 1.



of the ring perpendicular to its plane; and this attraction is expressible by E, the complete E.I.II.

Because with $\theta = 2\omega$,

$$(2) \qquad PQ^2 = PA^2\cos^2\omega + PB^2\sin^2\omega = PA^2\,\Delta^2(\omega, \gamma), \qquad \gamma' = \frac{PB}{PA},$$

and then the component normal attraction is

$$(3) \qquad N = \int C\frac{d\theta}{2\pi}\frac{PN}{PQ^3} = \frac{2C}{\pi}\frac{PN}{PA^3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega}{\Delta^3\omega},$$

this is reduced by a change to the co-amplitude angle ω', by

$$(4) \qquad \gamma' \tan\omega \tan\omega' = 1, \qquad \Delta\omega\,\Delta\omega' = \gamma', \qquad \frac{d\omega}{\Delta\omega} + \frac{d\omega'}{\Delta\omega'} = 0$$

and

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\Delta^3\omega} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\Delta\omega' d\omega'}{\gamma'^2} = \frac{H}{\gamma'^2},$$

$$(5) \qquad N = \frac{2C}{\pi}\frac{PN}{PA^3}\frac{H}{\gamma'^2} = \frac{2C}{\pi}\frac{PN}{PA}\frac{H}{PB^2} = C\frac{PN}{PA.PB^2}\frac{H}{\frac{1}{2}\pi}.$$

Then on the sphere at P, in coulombs/cm²

$$(6) \qquad \sigma = C\frac{OA^2 - OP^2}{4\pi.OP}\frac{1}{PA.PB^2}\frac{H}{\frac{1}{2}\pi}.$$

The P. F. at any point R due to this electrified ring on AB is

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= \int_0^{2\pi} \frac{C\,d\theta}{2\pi.RQ} = \frac{C}{\frac{1}{2}\pi.RA}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega}{\Delta\omega} = \frac{C}{RA}\frac{G}{\frac{1}{2}\pi} \\ &= \frac{C}{\sqrt{(RA.RB)}}\frac{G\sqrt{\gamma'}}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{C}{\sqrt{(RA.RB)}}\frac{Kz'}{\frac{1}{2}\pi} \\ &= \frac{C}{\frac{1}{2}(RA + RB)}\frac{K}{\frac{1}{2}\pi}, \\ \gamma' &= \frac{1-z}{1+z} = \frac{RA}{RB}, \end{aligned} \right.$$

in a quadric transformation.

If C′ is the charge on the ring A′B′, image of AB in the sphere, the P. F. at R

$$(8) \qquad U' = \frac{C'}{RA}\frac{G}{\frac{1}{2}\pi} = -\frac{C}{RA}\frac{OQ}{OA}\frac{G}{\frac{1}{2}\pi}$$

and then $U + U' = 0$ when R is on the sphere.

The F. F. of the charge C on the ring AB at any point P will be given by $C\,a\,\Omega_1$, where Ω_1 is the solid angle subtended at any point A on the ring by the circle on PP′.

The expansion given in a series of zonal harmonics is worthless and misleading, and gives no indication of the infinities on the ring AB and its image A′B′.

8. The typical element of a P. F. may be taken as the reciprocal of R, distance from a fixed point, and when the fixed point is at C in Ox, with $OC = c$, and $OP = r$, $xOP = \theta$ and $\cos\theta = \mu$:

$$(1) \qquad R^2 = c^2 - 2cr\cos\theta + r^2 = c^2 - 2cr\mu + r^2;$$

and with respect to the axis Ox the F. F. is $\cos PCx$.

The expansion of the reciprocal of R is powers of $\frac{r}{c}$ or $\frac{c}{r}$, introduces the coefficients of Legendre, or zonal harmonics as they are also called, denoted by $P_n(\mu)$ such that

$$(2) \quad \frac{1}{R} = \sum \frac{r^n}{c^{n+1}} P_n(\mu) \quad \left(\frac{r}{c} < 1\right), \qquad \text{or} \qquad \sum \frac{c^n}{r^{n+1}} P_n(\mu) \quad \left(\frac{r}{c} > 1\right),$$

and the discussion of the analytical properties of the zonal harmonic is to be found in every treatise on the subject.

They may be summarised in the relations

$$(3) \qquad \frac{d}{d\mu}(\mu^2 - 1)\frac{dP_n}{d\mu} = n(n+1)P_n,$$

$$(4) \qquad P_n(\mu) = \frac{1}{2^n . n!}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^n (\mu^2 - 1)^n,$$

$$(5) \qquad (n+1)P_{n+1} - (2n+1)\mu P_n + nP_{n-1} = 0,$$

$$(6) \qquad (\mu^2 - 1)\frac{dP_n}{d\mu} = (n+1)(P_{n+1} - \mu P_n) = n(\mu P_n - P_{n-1})$$

and so on (*Messenger of Mathematics*, August 1919, R. Hargreaves, *Standard relations of Legendre's Functions*).

Maxwell's interpretation by the coalescence of poles along Ox is explained in his *Electricity and Magnetism*, giving a physical meaning to the résult, such as in the repeated axial differentiation

$$(7) \qquad \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{r} = \frac{P_n(\mu)}{r^{n+1}}.$$

But the corresponding typical element of the F. F. will be R, and expanded in a series

$$(8) \qquad R = \sum \left(\frac{r^{n+1}}{c^n}, \text{ or } \frac{c^{n+1}}{r^n}\right) P_n(\mu)$$

and since

$$(8)' \qquad R = \int \frac{cr\,d\mu}{R},$$

$$(9) \qquad I_n(\mu) = \int P_n(\mu)\,d\mu = \frac{\mu^2-1}{n(n+1)}\frac{dP_n}{d\mu} = \frac{\mu^2-1}{n(n+1)}\frac{d^2 I_n}{d\mu^2}$$
$$= \frac{P_{n+1}-\mu P_n}{n} = \frac{\mu P_n - P_{n-1}}{n+1} = \frac{P_{n+1}-P_{n-1}}{2n+1}.$$

But R is not the F. F. of $\frac{1}{R}$, as this is $\cos PCx$ or $\frac{dR}{dx}$.

The F. F. of R. is given already as

$$(10) \quad \mathrm{sh}^{-1}\frac{NP}{CN} = \mathrm{ch}^{-1}\frac{CP}{CN} = \mathrm{th}^{-1}(\sin PCx) = \log\mathrm{tang}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}PCx\right) = \ldots.$$

Consult R. A. Sampson in the *Phil. Trans.*, 1891, on the Stokes Function, and a discussion of the properties of $I_n(\mu)$.

Similarly, for the F. F. relations of axial differentiation

$$(11) \qquad \left(\frac{d}{dx}\right)^n r = \frac{n!\,I_n(\mu)}{r^{n-1}}.$$

Thus for a solid sphere, take

$$(12) \qquad V = \frac{1}{r}, \qquad S = \frac{dr}{dx} = \cos\theta,$$

and for the magnetic doublet molecule, or a sphere moving along Ox in infinite liquid,

$$(13) \qquad V = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{x}{r^3}, \qquad S = \frac{d^2 r}{dx^2} = \sin\theta\frac{d\theta}{dx} = \frac{y^2}{r^3}.$$

Hence for a spherical boss on a infinite plane, electrified,

$$(14) \qquad V = x - x\frac{a^3}{r^3}, \qquad S = -\frac{1}{2}y^2 - y^2\frac{a^3}{r^3}$$

satisfying the relations $V = 0$ over the surface, and in space

$$(15) \qquad \frac{dS}{dx} = y\frac{dV}{dy}, \qquad \frac{dS}{dy} = -y\frac{dV}{dx}.$$

Coaxial doublets at S and T, inverse points in a sphere, centre O and radius OA, with resultant F. F.

$$S_1 - S_2 = PN^2 \frac{OS^3}{SP^3} - PN^2 \frac{OA^3}{TP^3},$$

will have $S_1 - S_2 = 0$ over the sphere, which can be made to screen the motion inside and outside the surface.

A singlet source at S and equal source at T would be screened by a plane bisecting ST at right angles.

But with a source S in the presence of the sphere and outside, the resultant F. F.

$$S_1 = \frac{SM}{SP} + \frac{OA}{OS}\frac{TM}{TP} + \frac{TP - TM}{OA} - \frac{OP - OM}{OA},$$

so that the hydrodynamical image of the source S in the sphere is an image source at T, and a line sink from T to O.

Over the sphere this satisfies the condition

$$S_1 = -\frac{MS}{SP} + \frac{TS - MS}{SP} + \frac{TP + OT}{OA} - 1,$$

and if SP cuts the sphere again in P′, SP.SP′ = OS.ST, so that with OR bisecting PP′ at right angles,

$$S_1 = -2\frac{MS}{SP} + \frac{SP'}{OS} + \frac{SP}{OS} + \frac{OT}{OA} - 1 = -2\frac{MS}{SP} + 2\frac{SR}{OS} - \frac{AT}{OA} = -\frac{AT}{OA},$$

a constant. The P.F. can then be written down, but is of more complicated analytical character, involving a logarithm.

A single source at T inside the sphere would have en image source at S, and a line sink extending from S to infinity, and would require to be associated physically with another equal sink inside the sphere, to draw off the accumulation of the stream.

Thence the special case given already in § 4.

9. The P. F. and F. F. has been calculated in the *Phil. Trans.*, 1919, *Electromagnetic Integrals*, for a number of problems in Electromagnetic and Attraction Theory, and the contrast drawn of the relative simplicity.

Thus for the rim potential P of the circle on the diameter $AB = 2a$, with axis in Ox, returning to Maxwell's notation,

$$(1)\qquad P = \int_0^{2\pi} \frac{a\,d\vartheta}{PQ}, \qquad PQ^2 = MQ^2 + PM^2 = A^2 + 2Aa\cos\vartheta + a^2 - b^2,$$

$$(2)\qquad \omega = \frac{1}{2}\vartheta, \qquad PQ^2 = r_3^2\cos^2\omega + r_2^2\sin^2\omega = r_3^2\,\Delta^2(\omega,\gamma), \qquad \gamma' = \frac{r_2}{r_1},$$

$$(3)\qquad P = \frac{2a}{r_1}\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{\Delta\omega} = \frac{4aG}{r_1}, \qquad G = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega}{\Delta(\omega,\gamma)}, \qquad \gamma^2 = \frac{4Aa}{r_1^2}.$$

But S, the rim F. F. at P proves to be given by the conical angle $\Omega(1-f)$, subtended at any point on the rim of the circle AB by the circle on the diameter PP′:

$$S = 2\pi a\,\Omega(1-f) \qquad (\textit{Phil. Trans.}, \text{p. } 57),$$

the conical angle subtended at P by the rim AB being $\Omega = \Omega(f)$, such that

$$(4)\qquad \Omega(f) + \Omega(1-f) = 2\pi - P\frac{b}{a}.$$

The solid angle Ω subtended at P by the circle on AB is the magnetic P. F. of unit current round the rim AB, or of the equivalent magnetic sheet on AB, magnetized normally; and its F. F. is given by Maxwell's M. in *E. and M.*, § **703**, in consequence of the equation (2), (3); and

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} 2\pi A a\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{PQ} = \pi\int\left(PQ - \frac{A^2+a^2+b^2}{PQ}\right)d\vartheta \\ &= 2\pi\int_0^{\pi}\left[r_1\Delta\omega - \frac{\frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)}{\gamma_1\Delta\omega}\right]d\omega \\ &= 2\pi\gamma_1[2H - (1+\gamma'^2)G]; \end{aligned}\right.$$

G and H, and so M is expressed by the complete E. I, I and H.

This M as defined by Maxwell is negative; so putting

$$M = -2\pi AQ,$$

then $Q\cos\eta$ is the magnetic potential of the circular sheet on AB magnetized parallel to AB; Q is a vector potential.

The integration of M with respect to b will give L for the induction of a current sheet round a cylinder (*Electromagnetic Integrals*) and this is also the F. F. of a circular area on AB,

$$(6)\qquad \begin{aligned} L = \int M\,db &= \pi a b P + \frac{1}{2} b M - \pi(a^2 - A^2)(2\pi - \Omega) \\ &= \pi A^2 \frac{b}{a} P + \frac{1}{2} b M - \pi(a^2 - A^2)\Omega(1 - f). \end{aligned}$$

Then for the P. F. W of the circular area

$$(7)\qquad W = \int\int \frac{2\pi a\,da\,d\theta}{PQ} = aP + \frac{M}{2\pi} - b\Omega.$$

An integration of L will give N the F. F. of the solid cylinder, at a point in the plane PP′ of its base, and

$$(8)\qquad \begin{aligned} N = \int L\,db &= \pi a\left(\frac{4}{3} A^2 + b^2\right) P \\ &\quad + \frac{1}{3}(2A^2 + 2a^2 - b^2) M - \pi b(a^2 - A^2)(2\pi - \Omega) \\ &= \pi A^2\left(\frac{4}{3} a + \frac{b^2}{a}\right) P \\ &\quad - \frac{2}{3}\pi A(2A^2 + 2a^2 - b^2) Q - \pi b(a^2 - A^2)\Omega(1 - f). \end{aligned}$$

Then $\frac{dN}{da}$ is the F. F. of the cylindrical skin,

$$(9)\qquad \frac{1}{2\pi}\frac{dN}{da} = aW - (A^2 + a^2 + b^2)P - 2aM + 2\pi ab;$$

the Ω being included in W.

But the P. F. of this solid cylinder, and of its cylindrical skin, introduces an intractable integral, whereas we may say that the F. F. has been expressed in finite terms, that is by tabulated functions.

So too for the F. F. of the disc, when the density varies as some n — th power of the distance from the centre; this can be expressed in finite terms, when the P. F. is intractable.

For the details of these integrations consult the Memoir on *Electromagnetic Integrals* in the *Phil. Trans.*, Dec. 1919.

The skin P. F. of the cylinder is given by

$$(10)\qquad I = \int_0^{2\pi} a\,d\theta \int_0^b \frac{db}{PQ} = \int_0^{2\pi} a\,d\theta\,\mathrm{th}^{-1}\frac{b}{PQ}$$

and then with

$$\theta = 2\phi = 2\,\mathrm{am}\,u, \qquad u = eG, \qquad PQ = r_1\,\mathrm{dn}\,u,$$

$$\mathrm{sn}\,2fG' = \frac{b}{r_2}, \qquad \mathrm{cn}\,2fG' = \frac{a-A}{r_2}, \qquad \mathrm{dn}\,2fG' = \frac{a+A}{r_1},$$

put

$$v = G + 2fG'i, \qquad \mathrm{sn}\,v = \frac{r_1}{a+A}, \qquad \mathrm{cn}\,v = \frac{ib}{a+A},$$

$$\mathrm{dn}\,v = \frac{a-A}{a+A}, \qquad \frac{b}{PQ} = \frac{i\,\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u},$$

$$\mathrm{th}^{-1}\frac{b}{PQ} = i\,\mathrm{tang}^{-1}\frac{\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u} = \frac{1}{2}i\sin^{-1}\frac{2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,u}{1-\gamma^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2 u}$$

$$= \frac{1}{2}i\,\mathrm{am}(u+v) - \frac{1}{2}i\,\mathrm{am}(u-v);$$

$$(11)\qquad I = 2ia\int_0^u [\mathrm{am}(u+v) - \mathrm{am}(u-v)]\,d\,\mathrm{am}\,u$$

an intractable integral.

Expanded in a series

$$(12)\qquad \mathrm{th}^{-1}\frac{b}{PQ} = \sum \frac{1}{2n+1}\left(\frac{b}{PQ}\right)^{2n+1} = \sum \frac{1}{2n+1}\left(\frac{b^2}{r_1 r_3}\,\frac{\gamma'}{\mathrm{dn}^2 u}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

$$(13)\qquad I = 4a\sum\left(\frac{b^2}{r_1 r_2}\right)^{n+\frac{1}{2}}\frac{P_n(u)}{2n+1}.$$

(Work out the surface longitudinal pressure due to self attraction.)

10. In a change to another system of orthogonal co-ordinates, u and v, given by the conformal representation of a conjugate system

$$(1)\qquad y + ix = f(v + iu),$$

equation (A) and (B) will change into

$$(A')\qquad \frac{d}{du}\left(y\frac{dN}{du}\right) + \frac{d}{dv}\left(y\frac{dN}{dv}\right) = 0,$$

$$(B')\qquad \frac{d}{du}\left(\frac{1}{y}\frac{dS}{du}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{y}\frac{dS}{dv}\right) = 0.$$

Thus for a system of confocal conics, foci at A, B, given by

$$(2)\qquad y + ix = c\,\mathrm{ch}(v + iu), \qquad y = c\,\mathrm{ch}\,u\cos v, \qquad x = c\,\mathrm{sh}\,u\sin v,$$

$$(3)\qquad \frac{d^2V}{du^2} + \mathrm{th}\,u\frac{dV}{du} + \frac{d^2V}{dv^2} - \mathrm{tang}\,v\frac{dV}{dv} = 0,$$

$$(4)\qquad \frac{d^2S}{du^2} - \mathrm{th}\,u\frac{dS}{du} + \frac{d^2S}{dv^2} + \mathrm{tang}\,v\frac{dS}{dv} = 0;$$

or with $\mathrm{ch}\,u = C$, $\cos v = \mu$,

$$(5)\qquad \frac{d}{dC}(C^2-1)\frac{dV}{dC} + \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu} = 0,$$

$$(6)\qquad (C^2-1)\frac{d^2S}{dC^2} + (1-\mu^2)\frac{d^2S}{d\mu^2} = 0.$$

Where $V = U.W$, $S = Q.R$, and U and Q are functions of u or C only, W and R of v or μ only,

$$(7)\qquad \frac{d}{dC}(C^2-1)\frac{dU}{dC} = kU, \qquad \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dW}{d\mu} = -kW,$$

$$(8)\qquad (C^2-1)\frac{d^2Q}{dC^2} = kQ, \qquad (1-\mu^2)\frac{d^2R}{d\mu^2} = -kR.$$

Thus we may take

$$(9)\qquad Q = \int U\,dC, \qquad R = \int W\,d\mu$$

or

$$(10)\qquad Q = (C^2-1)\frac{dU}{dC}, \qquad R = (1-\mu^2)\frac{dW}{d\mu}.$$

11. In the conformal representation of the dipolar co-ordinates, u and v, of the stereographic projection of the hemisphere, as in (3) § **2**,

$$(1)\qquad y + ix = a\coth\tfrac{1}{2}(u + iv) \qquad \text{or} \qquad a\cot\tfrac{1}{2}(v + iu),$$

$$y, x = a\frac{\mathrm{sh}\,u, \sin v}{\mathrm{ch}\,u - \cos v}.$$

Then, putting $V = P\sqrt{(\mathrm{ch}\,u - \cos v)}$, Laplace's equation (A') becomes

$$(2)\qquad \frac{d^2P}{du^2} + \coth u\frac{dP}{du} + \frac{d^2P}{dv^2} + \frac{1}{4}P = 0;$$

while, with $S = \frac{R}{\sqrt{(\operatorname{ch} u - \cos v)}}$, (B′) becomes

$$(3) \qquad \frac{d^2R}{du^2} - \coth u \frac{dR}{du} + \frac{d^2R}{dv^2} + \frac{1}{4}R = 0.$$

Then with P, R, varying as e^{inu}, and writing C, S for $\operatorname{ch} u$, $\operatorname{sh} u$,

$$(4) \qquad \frac{d}{dC}(C^2-1)\frac{dP}{dC} = \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)P, \qquad (C^2-1)\frac{d^2R}{dC^2} = \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)R)$$

so that P is a zonal harmonic or Legendre function of order $i = n - \frac{1}{2}$, while R is an I function, of the form

$$\int P\, dC.$$

These are the toroidal functions considered by W. M. Hicks in *Phil. Trans.*, 1881-4, expressed there in the form

$$(5) \qquad P_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\theta}{(C + S\cos\theta)^{n+\frac{1}{2}}};$$

and then, by differentiation,

$$(6) \qquad S^2\frac{dP_n}{dC} = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\pi}\int \frac{S(S + C\cos\theta)\, d\theta}{(S + C\cos\theta)^{n+\frac{3}{2}}}$$

$$= -\left(n + \frac{1}{2}\right)(CP_n - P_{n-1}) = \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\int P_n\, dC$$

and differentiating again

$$(7) \qquad \left(n - \frac{1}{2}\right)P_n = -P_n - C\frac{dP_n}{dC} + \frac{dP_{n+1}}{dC},$$

$$(8) \qquad \left(n - \frac{1}{2}\right)S^2P_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)C(CP_n - P_{n-1}) - \left(n + \frac{3}{2}\right)(CP_{n+1} - P_{n+2}),$$

$$(9) \qquad (2n+3)P_{n+2} - 4(n-1)CP_{n+1} + (2n+1)P_n = 0,$$

the recurring relation; equivalent to

$$(10) \qquad 4n(CP_n - P_{n+1}) = (2n-1)(P_{n-1} - P_{n+1}),$$

$$(11) \qquad R_n = \int P_n\, dC = -\frac{CP_n - P_{n-1}}{n - \frac{1}{2}} = \frac{P_{n+1} - P_{n-1}}{2n} = \frac{S^2\frac{dP_n}{dC}}{n^2 - \frac{1}{4}};$$

and other relations analogous to the former series for the zonal harmonic of integral order.

12. The change is made to the form employed by Macdonald, in *L. M. S.*, XXVI, by the substitution

$$(1)\qquad C + S\cos\theta = e^{\zeta} = \frac{PQ^2}{\gamma_1\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\cos^2\omega + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\sin^2\omega,$$

$$(2)\qquad 2.\operatorname{ch} u - \operatorname{ch}\zeta = 2C - C - S\cos\theta - \frac{1}{C + S\cos\theta} = \frac{S^2\sin^2\theta}{C + S\cos\theta},$$

$$(3)\qquad d\zeta = \frac{-S\sin\theta\, d\theta}{C + S\cos\theta}, \qquad \frac{d\zeta}{\sqrt{(2.\operatorname{ch} u - \operatorname{ch}\zeta)}} = \frac{-d\theta}{\sqrt{(C + S\cos\theta)}},$$

$$(4)\qquad P_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(C + S\cos\theta)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\pi}\int_{-u}^{u} \frac{e^{-n\zeta}\, d\zeta}{\sqrt{(2.\operatorname{ch} u - \operatorname{ch}\zeta)}}.$$

The reduction is made to elliptic functions through

$$(5)\qquad \begin{cases} e^{\zeta} = (C + S)\cos^2\omega + (C - S)\sin^2\omega = e^{u}\Delta^2\omega = \dfrac{\operatorname{dn}^2 eG}{\gamma'}, \\ \gamma' = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} = e^{-u}, \qquad \dfrac{1}{2}\theta = \omega - \operatorname{am} eG; \end{cases}$$

$$(6)\qquad e^{\frac{1}{2}(u+\zeta)} = \frac{\operatorname{dn} eG}{\gamma'}, \qquad \operatorname{sh}\frac{1}{2}(u + \zeta) = \frac{\gamma^2 \operatorname{cn}^2 eG}{2\gamma' \operatorname{dn} eG},$$

$$(7)\qquad e^{\frac{1}{2}(u-\zeta)} = \frac{1}{\operatorname{dn} eG}, \qquad \operatorname{sh}\frac{1}{2}(u - \zeta) = \frac{\gamma^2 \operatorname{sn}^2 eG}{2\operatorname{dn} eG},$$

$$(8)\qquad 2\operatorname{ch} u - \operatorname{ch}\zeta = 4\operatorname{sh}\frac{1}{2}(u + \zeta)\operatorname{sh}\frac{1}{2}(u - \zeta) = \frac{\gamma^2 \operatorname{sn}^2 eG \operatorname{cn}^2 eG}{\gamma' \operatorname{dn}^2 eG},$$

$$(9)\qquad \frac{d\zeta}{\sqrt{(2.\operatorname{ch} u - \operatorname{ch}\zeta)}} = -2\sqrt{\gamma'}\, de\mathrm{G},$$

$$(10)\qquad P_n(u) = \frac{2\sqrt{\gamma'}}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{dn}^2 eG}{\gamma'}\right)^n de\mathrm{G}$$

beginning with

$$(11)\qquad P_0 = \sqrt{\gamma'}\,\frac{G}{\frac{1}{2}\pi}, \qquad P_1 = \frac{H}{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\gamma'}},$$

and then proceeding with the sequence equation (9), § 11,

$$(12)\qquad P_2 = \frac{4}{3}CP_1 - \frac{1}{3}P_0, \qquad P_3 = \ldots,$$

all the $P's = 1$ at $u = 0$, but at $u = \infty$ they are all infinite.

Then, with $eG = V$,

$$(13)\qquad \left(n-\frac{1}{2}\right)R_n = P_{n+1} - CP_n = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\pi}\int_0^{eG}\left[\frac{\mathrm{dn}^2 v}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)\right]\left(\frac{\mathrm{dn}^2 v}{\gamma}\right)^n dv$$

$$= \frac{\gamma^2}{\pi\sqrt{\gamma}}\int_0^{V}(\mathrm{cn}^2 v - \mathrm{sn}^2 v)\left(\frac{\mathrm{dn}^2 v}{\gamma}\right)^n dv$$

starting with

$$(14)\qquad R_0 = \frac{G - H - (H - \gamma'^2 G)}{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\gamma}} = \frac{AQ}{\frac{1}{2}\pi\sqrt{(\gamma_1\gamma_2)}},$$

$$(15)\qquad 2nR_n = P_{n+1} - P_{n-1},$$

starting with $n = 1$,

$$(16)\qquad 2R_1 = P_2 - P_0 = \frac{4}{3}(CP_1 - P_x) = \frac{(1-\gamma'^2)H - 2\gamma'^2 G}{\frac{3}{2}\pi\gamma'\sqrt{\gamma}};$$

and thence by the sequence equation (9), § **11**, to the series

$$(17)\qquad (2n+3)R_{n+1} - 4nCR_n + (2n-3)R_{n-1} = 0.$$

15. In a Quadric Transformation of these Elliptic Functions, to a new modulus

$$(1)\qquad z = \frac{1-\gamma'}{1+\gamma'} = \mathrm{th}\,\frac{1}{2}u,$$

$$(2)\qquad \begin{aligned}
&e\zeta = \frac{\mathrm{dn}^2 eG}{\gamma} = \frac{1 + z\,\mathrm{sn}(1-2e)\mathbf{K}}{1 - z\,\mathrm{sn}(1-2e)\mathbf{K}},\\
&\mathrm{th}\,\tfrac{1}{2}\zeta = z\,\mathrm{sn}(1-2e)\mathbf{K}, \qquad \mathrm{ch}\,\tfrac{1}{2}\zeta = \frac{\mathrm{dn}\,2e\mathbf{K}}{z}, \qquad \mathrm{sh}\,\tfrac{1}{2}\zeta = \frac{z\,\mathrm{cn}\,2e\mathbf{K}}{z'},\\
&\gamma'\,\mathrm{tn}^2 eG = \frac{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}(u-\zeta)}{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}(u+\zeta)} = \frac{\mathrm{th}\,\frac{1}{2}u - \mathrm{th}\,\frac{1}{2}\zeta}{\mathrm{th}\,\frac{1}{2}u + \mathrm{th}\,\frac{1}{2}\zeta}\\
&\qquad = \frac{1 - \mathrm{sn}(1-2e)\mathbf{K}}{1 + \mathrm{sn}(1-2e)\mathbf{K}} = \frac{\mathrm{dn}\,2e\mathbf{K} - \mathrm{cn}\,2e\mathbf{K}}{\mathrm{dn}\,2e\mathbf{K} + \mathrm{cn}\,2e\mathbf{K}},\\
&\tfrac{1}{2}d\zeta = -z\,\mathrm{sn}\,2e\mathbf{K}\,.\,d(2e\mathbf{K}).
\end{aligned}$$

and

$$(3)\qquad \frac{d\zeta}{\sqrt{(2.\mathrm{ch}\,u-\mathrm{ch})\zeta}} = \frac{\frac{1}{2}d\zeta}{\sqrt{\left(\mathrm{ch}^2\frac{1}{2}u-\mathrm{ch}^2\frac{1}{2}\zeta\right)}}$$

$$= \frac{-\varkappa\,\mathrm{sn}\,2e\mathrm{K}.d(2e\mathrm{K})}{\frac{\varkappa}{\varkappa'}\mathrm{sn}\,2e\mathrm{K}} = -2\varkappa' de\,\mathrm{K}.$$

$$(4)\qquad \int_{-u,\zeta}^{u}\frac{d\zeta}{\sqrt{(2.\mathrm{ch}\,u-\mathrm{ch}\,\zeta)}} = 2\varkappa'\mathrm{K}.\quad 2e\varkappa'\mathrm{K} = 2\mathrm{G}\sqrt{\gamma},\quad 2e\mathrm{G}\sqrt{\gamma},\quad \varkappa'\mathrm{K} = \mathrm{G}\sqrt{\gamma}.$$

Then

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
&r^2 = \gamma_1\gamma_2 e^{\zeta},\qquad \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2) = \gamma_1\gamma_2\,\mathrm{ch}\,u,\\
&2ay\cos\theta = \frac{1}{2}(\gamma_1^2+\gamma_2^2) - r^2 = \gamma_1\gamma_2(\mathrm{ch}\,u - e^{\zeta}),\\
&\mathrm{ch}\,u - e^{\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma'}+\gamma\right) - \frac{\mathrm{dn}^2 e\mathrm{G}}{\gamma'} = \frac{1+\varkappa^2}{\varkappa'^2} - \frac{\mathrm{dn}\,2e\mathrm{K}+\varkappa\,\mathrm{cn}\,2e\mathrm{K}}{\mathrm{dn}\,2e\mathrm{K}-\varkappa\,\mathrm{cn}\,2e\mathrm{K}}\\
&\qquad = \frac{1+\varkappa^2-(\mathrm{dn}\,2e\mathrm{K}+\varkappa\,\mathrm{cn}\,2e\mathrm{K})^2}{\varkappa'^2}\\
&\qquad = 2\frac{1-\mathrm{dn}^2 2e\mathrm{K}-\varkappa\,\mathrm{cn}\,2e\mathrm{K}\,\mathrm{dn}\,2e\mathrm{K}}{\varkappa'^2},\\
&\frac{\mathrm{M}}{2\sqrt{(\gamma_1\gamma_2)}} = \int_{-u}^{u}\frac{(\mathrm{ch}\,u-e^{\zeta})\,d\zeta}{\sqrt{(2.\mathrm{ch}\,u-\mathrm{ch}\,\zeta)}}\\
&\qquad = -2\int_0^1(1-\mathrm{dn}^2 2e\mathrm{K}-\varkappa\,\mathrm{cn}\,2e\mathrm{K}\,\mathrm{dn}\,2e\mathrm{K})\frac{2\mathrm{K}\,de}{\varkappa} = -4\frac{\mathrm{K}-\mathrm{E}}{\varkappa'},\\
&\qquad \mathrm{E} = \int_0^1\mathrm{dn}^2 2e\mathrm{K}.2\mathrm{K}\,de,\\
&\mathrm{M} = -4\pi(\gamma_1+\gamma_2)(\mathrm{K}-\mathrm{E}),\qquad \varkappa = \frac{2\sqrt{(\gamma_1\gamma_2)}}{\gamma_1+\gamma_2}.
\end{aligned}\right.$$

14. The integral considered by Macdonald, *L. M. S.*, XXVI, p. 165,

$$(1)\qquad \mathrm{Q}_n(u) = \int_u^{\infty}\frac{e^{-n\zeta}d\zeta}{\sqrt{(2.\mathrm{ch}\,\zeta-\mathrm{ch}\,u)}}$$

is a zonal harmonic or toroidal function of the second kind, and of

order $i = n - \frac{1}{2}$; and by the substitution

$$(2) \qquad e^{\zeta} = C + S \operatorname{ch} \theta', \qquad 2(\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch} u) = \frac{S^2 \operatorname{sh}^2 \theta'}{C + S \operatorname{ch} \theta'}$$

it takes the form employed by W. M. Hicks

$$(3) \qquad Q_n(u) = \int_0^\infty \frac{d\theta'}{(C + S \operatorname{ch} \theta')^{n+\frac{1}{2}}}.$$

The reduction to the elliptic function relation is made through the substitution

$$(4) \quad e^{-\zeta} = \gamma' \operatorname{sn}^2 fG'. \qquad \gamma' = e^{-u}. \qquad Q_n(u) = 2\sqrt{\gamma'} \int_0^1 (\gamma' \operatorname{sn}^2 fG')^n \, df G'.$$

Because

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{2}\zeta + u} = \gamma' \operatorname{sn} fG', & e^{-\frac{1}{2}\zeta - u} = \operatorname{sn} fG'. \\ 2.\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch} u = \dfrac{\operatorname{cn}^2 fG' \operatorname{dn}^2 fG'}{\gamma' \operatorname{sn}^2 fG'}, & d\zeta = -\dfrac{2 \operatorname{cn} fG' \operatorname{dn} fG'}{\operatorname{sn} fG'} d(fG'); \end{array} \right.$$

$$(6) \qquad \int_{u,\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{(2.\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch} u)}} = 2G\sqrt{\gamma'}. \qquad 2fG'\sqrt{\gamma'}, \qquad \infty > \zeta > u.$$

Then in the Quadric Transformation

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e^{-\zeta} = \gamma' \operatorname{sn}^2 fG' = \dfrac{1 - \operatorname{dn} fK'}{1 + \operatorname{dn} fK'}, & \operatorname{th} \frac{1}{2}\zeta = \operatorname{dn} fK'. \\ \operatorname{sech} \frac{1}{2}\zeta = \alpha' \operatorname{sn} fK', & \frac{1}{2} d\zeta = -\dfrac{\operatorname{cn} fK'}{\operatorname{sn} fK'} df K', \\ 2.\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch} u = 4\left(\operatorname{ch}^2 \frac{1}{2}\zeta - \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} u\right) = 4 \dfrac{\operatorname{cn}^2 fK'}{\alpha'^2 \operatorname{sn}^2 fK'}; & \end{array} \right.$$

$$(8) \qquad \frac{d\zeta}{\sqrt{(2.\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch} u)}} = -\alpha' df K';$$

$$(9) \qquad \int_{u,\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{(2.\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch} u)}} = \alpha' K', \quad fz K'; \qquad \alpha K' = 2G'\sqrt{\gamma'}; \qquad \frac{K'}{K} = 2\frac{G}{G'}.$$

The corresponding elliptic function expressions of $R_n(u)$ in (13), § **12**, irrespective of a constant factor, are then

$$(10) \qquad R_n(u) = \int (P_n . Q_n) \, dC = \int_{u,u}^{\infty,\infty} e^{-n\zeta} \sqrt{(2.\operatorname{ch} u - \operatorname{ch}\zeta)} \, d\zeta$$

and so reducible in the same way to

$$(11)\qquad B_n(u) = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{dn}^2 eG}{\gamma'}\right)^n \mathrm{sn}^2 eG\, \mathrm{cn}^2 eG\, G\, de$$

or

$$\int (\gamma' \mathrm{sn}^2 fG')^n \mathrm{cn}^2 fG'\, \mathrm{dn}^2 fG'\, G'\, df.$$

15. Change ζ into $i\omega$ in (1), § **14**, to obtain another form of Q, not derivable however directly from the form in (1), (10), § **14**.

$$(1)\qquad \begin{cases} Q_n(u) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos n\omega\, d\omega}{\sqrt{(2C - \cos\omega)}}, \\ \dfrac{dQ_n}{dC} = -\displaystyle\int \frac{\cos n\omega\, d\omega}{(2C - \cos\omega)^{\frac{3}{2}}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{CQ_n - Q_{n+1}}{S^2}; \end{cases}$$

and then, with

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - \omega) = \mathrm{am}\, fK', \qquad \dfrac{d\omega}{\sqrt{(2C - \cos\omega)}} = z'\, df K', \\ z' = \mathrm{sech}\, \frac{1}{2} u, \qquad z = \mathrm{th}\, \frac{1}{2} u = \dfrac{1 - \gamma'}{1 + \gamma'}; \end{cases}$$

$$(3)\qquad Q_n(u) = \int_0^1 \cos n(\pi - 2\,\mathrm{am}\, fK')\, z'\, df K'.$$

As in the *Am. J. Math.*, XXXIX, p. 375, this is convertible in to the form (3), § **14**, by the substitution

$$(4)\qquad \sin\frac{1}{2}\omega = \frac{\sqrt{(C + S\,\mathrm{ch}\,\theta')}}{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}u + \mathrm{ch}\,\frac{1}{2}u\,\mathrm{ch}\,\theta'}, \qquad \cos\frac{1}{2}\omega = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}u\,\mathrm{sh}\,\theta}{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}u + \mathrm{ch}\,\frac{1}{2}u\,\mathrm{ch}\,\theta};$$

$$(5)\qquad \frac{d\omega}{\sqrt{(2C - \cos\omega)}} = \frac{d\theta'}{\sqrt{(C + S\,\mathrm{ch}\,\theta')}}.$$

Here again, substitute

$$(6)\qquad \mathrm{ch}\,\frac{1}{2}\theta' = \sec\xi, \qquad \mathrm{sh}\,\frac{1}{2}\theta = \tan\xi, \qquad d\theta' = 2\sec\xi\, d\xi, \qquad e^{-u} = \gamma;$$

$$(7)\qquad C + S\,\mathrm{ch}\,\theta' = e^u \mathrm{ch}^2\frac{1}{2}\theta' - e^{-u}\mathrm{sh}^2\frac{1}{2}\theta' = \frac{\sec^2\xi\,\Delta^2\xi}{\gamma},$$

and

$$(8)\qquad \frac{d\theta'}{\sqrt{(C+S\,\mathrm{ch}\,\theta')}} = 2\sqrt{\gamma}\,\frac{d\zeta}{\Delta\zeta} = 2\sqrt{\gamma}\,d(fG) \qquad \zeta = \mathrm{am}\,fG\,;$$

$$(9)\qquad C+S\,\mathrm{ch}\,\theta' = \frac{\mathrm{dn}^2 fG}{\gamma\,\mathrm{cn}^2 fG} = \frac{1}{\gamma\,\mathrm{sn}^2(1-f)G},$$

and then, as in (10), § **12**.

$$(10)\qquad Q_n(u) = 2\sqrt{\gamma}\int_0^1 [\gamma\,\mathrm{sn}^2(1-f)G]^n G\,df = 2\sqrt{\gamma}\int (\gamma\,\mathrm{sn}^2 fG)^n G\,df.$$

A quadric transformation connects up this ω and θ' through the relation,

$$(11)\qquad \mathrm{dn}\,fK = \sqrt{\left(1-\chi^2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\right)} = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}u - \mathrm{sh}\,\frac{1}{2}u\,\mathrm{ch}\,\theta'}{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}u - \mathrm{ch}\,\frac{1}{2}u\,\mathrm{ch}\,\theta'},$$

$$(12)\qquad \frac{1-\mathrm{dn}\,fK}{1+\mathrm{dn}\,fG} = e^{-u}\,\mathrm{th}^2\tfrac{1}{2}\theta' = \gamma\,\mathrm{sn}^2 fG\,,$$

$$(13)\qquad \mathrm{sn}\,fK = \frac{(1+\gamma)\,\mathrm{sn}\,fG}{1+\gamma\,\mathrm{sn}^2 fG}, \qquad \mathrm{cn}\,fK = \frac{\mathrm{cn}\,fG\,\mathrm{dn}\,fG}{1+\gamma\,\mathrm{sn}^2 fG},$$

the usual formulas of the complementary Quadric Transformation; and

$$(14)\qquad \sqrt{\chi}\,\mathrm{tn}\,f\chi' = \frac{\gamma\,\mathrm{sn}\,fG}{\mathrm{cn}\,fG\,\mathrm{dn}\,fG} = \frac{\mathrm{cn}(1-f)G}{\mathrm{cn}\,fG}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}\,2fG - \mathrm{cn}\,2fG}{\mathrm{dn}\,2fG + \mathrm{cn}\,2fG}\right)} = \sqrt{\frac{1-\mathrm{sn}(1-2f)G}{1+\mathrm{sn}(1-2f)G}},$$

$$(15)\qquad \frac{\mathrm{dn}\,fK}{\sqrt{\chi}} = \sqrt{\frac{1-\gamma\,\mathrm{sn}(1-2f)G}{1-\gamma\,\mathrm{sn}(1-2f)G}} = \sqrt{\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)}\,\frac{1-\gamma\,\mathrm{sn}^2 fG}{1+\gamma\,\mathrm{sn}^2 fG}$$

16. The reduction can be carried out in the same manner as for the toroidal function

$$(1)\qquad P_n(u) = \int \frac{e^{-n\zeta}\,d\zeta}{\sqrt{(2.\,\mathrm{ch}\,\zeta + \cos\theta)}},$$

solution of the D. E., with $\cos\theta = \mu$,

$$(2)\qquad \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dP}{d\mu} + \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)P = 0.$$

through the substitution

$$(3)\qquad {}^{\frac{1}{2}\zeta} = \cot\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}, \qquad \frac{1}{2}d\zeta = -\frac{d\varphi}{\sin\varphi},$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} 2.\mathrm{ch}\,\zeta + \cos\theta &= e^{\zeta} + 2\cos\theta + e^{-\zeta} = \frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} + 2\cos\theta + \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \\ &= 4\,\frac{1-\sin^2\frac{1}{2}\theta\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} = 4\,\frac{\Delta^2(\varphi,\chi)}{\sin^2\varphi}, \\ \chi &= \sin\frac{1}{2}\theta, \end{aligned}\right.$$

$$(5)\qquad \frac{du}{\sqrt{(2.\mathrm{ch}\,\zeta+\cos\theta)}} = -\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -d(e\mathbf{k}), \qquad \varphi = \mathrm{am}\,e\mathbf{k},$$

$$(6)\qquad \int_{u,\ \infty}^{\infty,\ u} \frac{d\zeta}{\sqrt{(2.\mathrm{ch}\,\zeta+\cos\theta)}} = e\mathbf{k}, \qquad \int_{0,\ -\infty}^{\infty,\ 0} = \mathbf{k}.$$

$$(7)\qquad \sqrt{(2.\mathrm{ch}\,\zeta+\cos\theta)} = 2\,\frac{\mathrm{dn}\,e\mathbf{k}}{\mathrm{sn}\,e\mathbf{k}} = \frac{2\chi}{\mathrm{cn}\,(1-e)\mathbf{k}}.$$

In the quadric transformation

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{dn}\,e\mathbf{k}}{\sqrt{\chi}} &= \frac{\mathrm{dn}\,\frac{1}{2}e\mathrm{G} + \mathrm{dn}\left(1-\frac{1}{2}e\right)\mathrm{G}}{2\sqrt{\gamma}}, \\ \frac{\mathrm{dn}\,(1-e)\mathbf{k}}{\sqrt{\chi}} &= \frac{\mathrm{dn}\,\frac{1}{2}(1-e)\mathrm{G} - \mathrm{dn}\,\frac{1}{2}(1+e)\mathrm{G}}{2\sqrt{\gamma}}, \end{aligned}\right.$$

$$(9)\qquad \mathrm{th}^2\frac{1}{2}\zeta = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}\zeta - 1}{\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}\zeta + 1} = \frac{1-\mathrm{sn}\,2e\mathbf{k}}{1+\mathrm{sn}\,2e\mathbf{k}} = \frac{\mathrm{cn}^2\frac{1}{2}(1+e)\mathbf{k}}{\mathrm{cn}^2\frac{1}{2}(1-e)\mathbf{k}},$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1+\chi\,\mathrm{sn}\,e\mathbf{k}}{1-\chi\,\mathrm{sn}\,e\mathbf{k}} &= \frac{1+\chi}{1-\chi}\left[\frac{1-\chi\,\mathrm{sn}^2\frac{1}{2}(1-e)\mathbf{k}}{1+\chi\,\mathrm{sn}^2\frac{1}{2}(1-e)\mathbf{k}}\right] = \frac{\mathrm{dn}^2\frac{1}{2}(1-e)\mathrm{G}}{\gamma'}, \\ \mathrm{th}^2\frac{1}{2}\zeta &= \gamma'\,\mathrm{tn}^2\frac{1}{2}(1-e)\mathrm{G}, \qquad \gamma' = \mathrm{tang}^2\frac{1}{4}(\pi-\theta). \end{aligned}\right.$$

$$(11)\qquad \mathrm{sn}\,e\mathbf{k} = \mathrm{sech}\,\frac{1}{2}\zeta, \qquad \mathrm{cn}\,e\mathbf{k} = \mathrm{th}\,\frac{1}{2}\zeta, \qquad \mathrm{dn}\,e\mathbf{k} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\zeta+\cos\theta}{\mathrm{ch}\,\zeta+1}},$$

and

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{sn}(1-e)\mathbf{k} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\zeta - 1}{\operatorname{ch}\zeta + \cos\theta}}, \qquad \operatorname{cn}(1-e)\mathbf{k} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{\operatorname{ch}\zeta + \cos\theta}},\\ &\operatorname{dn}(1-e)\mathbf{k} = \cos\tfrac{1}{2}\theta\sqrt{\frac{\operatorname{ch}+1}{\operatorname{ch}\zeta + \cos\theta}}.\end{aligned}\right.$$

17. Then there are the definitions of the toroidal function in the form

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} P_n(\cos\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(2.\cos\varphi - \cos\theta)}},\\ R_n(\cos\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\theta}\sqrt{(2.\cos\varphi - \cos\theta)}\cos n\varphi\, d\varphi,\end{aligned}\right.$$

leading to Mehler's definition of the zonal harmonic of order m when n is replaced by $m + \frac{1}{2}$.

Here in a reduction to the elliptic function we substitute, as in pendulum motion,

$$(2)\qquad \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sin\tfrac{1}{2}\theta\sin\chi, \qquad \cos\tfrac{1}{2}\theta = \Delta\chi, \qquad z = \sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

$$(3)\qquad 2.\cos\varphi - \cos\theta = 4.\sin^2\tfrac{1}{2}\theta - \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi = 4\sin^2\tfrac{1}{2}\theta\,\Delta^2\chi,$$

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}d\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta\cos\chi\, d\chi}{\Delta\chi}, \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{(2.\cos\varphi - \cos\theta)}} = \frac{d\chi}{\Delta\chi},$$

and then $\cos m\varphi$ must be expanded in power of $\cos^2\frac{1}{2}\varphi$ to obtain a resemblance with previous results.

When n is half an odd integer,

$$n = m + \tfrac{1}{2}, \qquad \cos n\varphi = \cos m\varphi\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \sin m\varphi\sin\tfrac{1}{2}\varphi,$$

and the integration can be effected algebraically, to the ordinary form of the zonal harmonic of Legendre.

The solution of the D. E. for the Mehler function,

$$(5)\qquad \frac{d}{dC}(C^2 - 1)\frac{dM}{dC} = \left(m^2 + \frac{1}{4}\right)M,$$

is obtained from Macdonald's form of P_n and Q_n by a change of n^2 into $-m^2$, and will then be given by the form

$$(6) \qquad M(u) = \int_{-u,u}^{u,\infty} \frac{\cos m\zeta \, d\zeta}{\sqrt{(2.\operatorname{ch} u - \operatorname{ch}\zeta)}},$$

reducible as before to definite elliptic integrals (J.-W. Hobson, *Phil. Trans.*, 1896. — W. Burnside, *Messenger of Mathematics*, t. XIV, p. 122. — W.-D. Niven, *L. M. S.*, t. XXVIII, p. 218; *Am. J. of Math.*, t. XXXIX, p. 371).

The verification of the D. E. (5) is troublesome because of the infinity arising at the limits, and it requires the same treatment as Macdonald's C and D in § 2.

18. In Sonine's integral, *Math. Ann.*, t. XVI, quoted by Macdonald in *L. M. S.*, t. XXVI, p. 160,

$$(1) \qquad J = \int_0^\infty J_n(zr) J_n(zr') \, dz = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi (rr')^n} \int_0^{r'} \frac{x^{2n} \, dx}{\sqrt{(r^2 - x^2 . r'^2 - x^2)}}.$$

Here we substitute

$$(2) \qquad z\sqrt{(rr')} = 2e^{\frac{1}{2}\zeta}, \qquad zr = 2, \qquad x = \sqrt{(rr')}\, e^{-\frac{1}{2}\zeta}, \qquad \frac{r}{r'} = e^u;$$

and introducing the Fourier function in place of Bessel's,

$$(3) \qquad \sqrt{(rr')}\, J = \int_{-\infty}^{\infty} J_n\left[2e^{\frac{1}{2}(\zeta+u)}\right] J_n\left[2e^{\frac{1}{2}(\zeta-u)}\right] e^{\frac{1}{2}\zeta} \, d\zeta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_n(e^{\zeta+u}) F_n(e^{\zeta-u}) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} \, d\zeta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_u^\infty \frac{e^{-n\zeta} \, d\zeta}{\sqrt{(2.\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch} u)}} = Q_n(u),$$

$$(4) \qquad \sqrt{(rr')} = \frac{2a}{\sqrt{(2.\operatorname{ch} u - \cos v)}}, \qquad za = e^{\frac{1}{2}\zeta}\sqrt{(2.\operatorname{ch} u - \cos v)},$$

$$(5) \qquad r^2 - x^2 = rr'(e^u - e^{-\zeta}), \qquad r'^2 - x^2 = rr'(e^{-u} - e^{-\zeta}),$$

$$(6) \qquad \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2 . r'^2 - x^2)}} = \frac{-d\zeta}{2\sqrt{(rr')}\sqrt{(2.\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch} u)}}.$$

19. For the solid angle Ω, and its dissections, refer to the *Trans-*

American Math. Society, oct. 1907, p. 54, for the definitions and results. Begin, as in *Phil. Trans.*, 1919, § 13, *Electromagnetic Integrals*, with the form

$$(1)\qquad \Phi = \Omega(\mathrm{PY}) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{PQ}^2}{\mathrm{PY}^2}\,\frac{b\,d\theta}{\mathrm{PQ}},$$

obtained for the perimeter Φ of the sphero-conic, reciprocal to the cone on the circular base AB, vertex at P, of which the solid angle

$$\Omega = 2\pi - \Phi.$$

Here PY is the perpendicular on the tangent of the circle at P; and in Maxwell's notation with $y = \mathrm{A}$,

$$\mathrm{PA} = r_1, \qquad \mathrm{PB} = r_2, \qquad \theta = 2\omega,$$

$$(2)\qquad \mathrm{PQ}^2 = r_1 r_2 e^{\zeta}, \qquad \mathrm{PA}^2 = r_1 r_2 e^{u}, \qquad \mathrm{PB}^2 = r_1 r_2 e^{-u},$$

$$(3)\qquad \mathrm{PY}^2 = \mathrm{PQ}^2 - \mathrm{QY}^2 = r_1 r_2 e^{\zeta} - \mathrm{A}^2 \sin^2\theta,$$

$$(4)\qquad 4\mathrm{A}a \sin^2\tfrac{1}{2}\theta = \mathrm{PA}^2 - \mathrm{PQ}^2 = r_1 r_2 (e^{u} - e^{\zeta}),$$

$$(5)\qquad 4\mathrm{A}a \cos^2\tfrac{1}{2}\theta = \mathrm{PQ}^2 - \mathrm{PB}^2 = r_1 r_2 (e^{\zeta} - e^{-u}),$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} 4a^2.\mathrm{QY}^2 = 4\mathrm{A}^2 a^2 \sin^2\theta &= 2 r_1^2 r_2^2 (\mathrm{ch}\,u + \mathrm{ch}\,\zeta)\, e^{\zeta} \\ &= 2 r_1 r_2 (\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta)\mathrm{PQ}^2, \end{aligned}$$

$$(7)\qquad \frac{\mathrm{QY}^2}{\mathrm{PQ}^2} = \frac{r_1 r_2}{2a^2}(\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta) = \frac{\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta}{\mathrm{ch}\,u - \cos v}, \qquad \frac{\mathrm{PY}^2}{\mathrm{PQ}^2} = \frac{\mathrm{ch}\,\zeta - \cos v}{\mathrm{ch}\,u - \cos v}.$$

With another dissection of Ω into elements by QNQ′ slices,

$$(8)\qquad \Omega(\mathrm{PN}) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{QN}^2}{\mathrm{PN}^2}\,\frac{b\,d\theta}{\mathrm{PQ}}.$$

$$(9)\qquad \begin{aligned} \mathrm{PN}^2 = \mathrm{PQ}^2 - \mathrm{QN}^2 &= r_1 r_2 e^{\zeta} - a^2 \sin^2\theta \\ &= \mathrm{PQ}^2 \left[1 - \frac{\frac{1}{2} r_1 r_2}{\mathrm{A}^2}(\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta) \right] \\ &= \mathrm{PQ}^2 \left[1 - \frac{(\mathrm{ch}\,u - \cos v)(\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta)}{\mathrm{sh}^2\,u} \right] \\ &= \frac{\mathrm{PQ}^2}{\mathrm{sh}^2\,u}(\mathrm{ch}\,u - \cos v)(\mathrm{ch}\,\zeta - \cos v'). \end{aligned}$$

$$(10)\qquad \cos v' = \frac{1 - \mathrm{ch}\,u \cos v}{\mathrm{ch}\,u - \cos v}, \qquad \sin v' = \frac{\mathrm{sh}\,u \sin u}{\mathrm{ch}\,u - \cos v}, \qquad \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2} v\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2} v' = \mathrm{th}\,\tfrac{1}{2} u.$$

interpreted geometrically in paragraph **25**, and then with

$$\tfrac{1}{2}(\pi - c) = \mathrm{am}\, f\mathrm{K}', \qquad \tfrac{1}{2}(\pi - c') = \mathrm{am}\,(1-f)\mathrm{K}'.$$

$$\Omega(\mathrm{PN}) = \int_0^u \sqrt{\left(\frac{\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta}{\mathrm{ch}\,u - \cos c}\right)}\, \frac{2\sin c\, d\zeta}{\mathrm{ch}\,\zeta - \cos c}. \tag{11}$$

To connect up $\Omega(\mathrm{PN})$ and $\Omega(\mathrm{PY})$, the Addition Theorem of the *E. F.*, III is required; so take

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \sin^{-1} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{(\mathrm{ch}\,\zeta - \cos c\,.\,\mathrm{ch}\,\zeta - \cos c')}} \\ &= \cos^{-1} \frac{\sin u}{\sqrt{(\mathrm{ch}\,u - \cos c)}} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta}{\mathrm{ch}\,\zeta - \cos c\,.\,\mathrm{ch}\,\zeta - \cos c'}\right)} \end{aligned} \tag{12}$$

then

$$\frac{d\mathrm{I}}{d\zeta} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{ch}\,u - \cos c}{\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta}\right)} \frac{\frac{1}{2}\sin c}{\mathrm{ch}\,\zeta - \cos c} + \sqrt{\left(\frac{\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta}{\mathrm{ch}\,u - \cos c}\right)} \frac{\frac{1}{2}\sin c}{\mathrm{ch}\,\zeta - \cos c} \tag{13}$$

and integrating between $0 < \zeta < u$ and multiplying by 4

$$2\pi = \Omega(\mathrm{PY}) + \Omega(\mathrm{PN}). \tag{14}$$

$$\mathrm{PQ}^2 = r^2 = \Lambda^2 + 2\Lambda a\cos\vartheta + a^2 + b^2 = r_1 r_2 e^{\zeta}. \tag{15}$$

$$-2\Lambda a \sin\vartheta\, d\vartheta = r_1 r_2 e^{\zeta} d\zeta = \mathrm{PQ}^2 d\zeta. \tag{16}$$

$$2\Lambda a \sin\vartheta = \sqrt{(r_1 r_2)}\sqrt{(2\,.\,\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta)}\,\mathrm{PQ}, \tag{17}$$

$$\frac{d\vartheta}{\mathrm{PQ}} = -\frac{1}{\sqrt{(r_1 r_2)}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(2\,.\,\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta)}}, \tag{18}$$

$$\frac{b\, d\vartheta}{\mathrm{PQ}} = -\frac{\sin c}{\sqrt{(\mathrm{ch}\,u\,.\cos c)}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(2\,.\,\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta)}}, \tag{19}$$

$$\Omega(\mathrm{PY}) = \int_0^u \sqrt{\left(\frac{\mathrm{ch}\,u - \cos c}{\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta}\right)} \frac{2\sin c\, d\zeta}{\mathrm{ch}\,\zeta - \cos c}, \tag{20}$$

and so this Ω is seen to satisfy Laplace's equation, in the procedure of § **5**, $f = 1$.

The substitution

$$\mathrm{ch}\,\zeta = s, \qquad \frac{d\zeta}{\sqrt{(2\,.\,\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta)}} = \frac{\sqrt{2}\, ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}. \tag{21}$$

$$\mathrm{S} = 4\,.\,s_1 - s\,.\,s - s_2\,.\,s - s_3, \qquad s_1 = \mathrm{ch}\,u, \qquad s_2 = 1, \qquad s_3 = -1,$$

$$\sigma = \cos c, \qquad -\Sigma = 4\sin^2 c\,(\mathrm{ch}\,u - \cos c), \qquad \chi^2 = \frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_3} = \mathrm{th}^2\,\tfrac{1}{2}u,$$

brings back the form

$$\Phi = 4\int_{s_2}^{s_1} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{-\Sigma}}{s-\sigma}\,\frac{ds}{\sqrt{S}} = 2\pi f + 4\,\mathrm{K}\,\mathrm{zn}\,f\mathrm{K}'; \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{s-s_2}{s_1-s_2} = \frac{\mathrm{sh}^2\frac{1}{2}\zeta}{\mathrm{sh}^2\frac{1}{2}u} = \mathrm{cn}^2\,2e\mathrm{K}, \qquad \frac{s-s_3}{s_1-s_3} = \frac{\mathrm{ch}^2\frac{1}{2}\zeta}{\mathrm{ch}^2\frac{1}{2}u} = \mathrm{dn}^2\,2e\mathrm{K}, \\ &\qquad \mathrm{th}\,\tfrac{1}{2}\zeta = \varkappa\,\mathrm{sn}(1-2e)\mathrm{K}; \end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$\frac{s_2-\sigma}{s_2-s_3} = \sin^2\tfrac{1}{2}v = \mathrm{cn}^2 f'\mathrm{K}, \qquad \tfrac{1}{2}(\pi - v) = \mathrm{am}\,f\mathrm{K}'. \tag{24}$$

This I is the I_9 of the *Trans. A. M. S.*, 1907, where

$$\mathrm{I}_9 = \sin^{-1}\frac{b\sin\theta.\mathrm{PQ}}{\mathrm{PY}.\mathrm{PN}} = \cos^{-1}\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{PY}.\mathrm{PN}}, \tag{25}$$

$$\mathrm{R} = \lambda a\cos^2\theta + (\lambda^2 + a^2 + b^2)\cos\theta + \lambda a = \frac{\mathrm{A}}{a}\,\mathrm{MD}.\mathrm{ME}, \tag{26}$$

and then, by a straightforward differentiation,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathrm{I}_9}{d\theta} &= -\frac{\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{PY}.\mathrm{PN}}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{d\theta} - \frac{1}{2}\frac{d.\mathrm{PY}^2}{\mathrm{PY}^2.d\theta} - \frac{1}{2}\frac{d.\mathrm{PN}^2}{\mathrm{PN}^2.d\theta}\right)}{\frac{b\sin\theta.\mathrm{PQ}}{\mathrm{PY}.\mathrm{PN}}} \\ &= \left(\frac{\mathrm{PQ}^2}{\mathrm{PY}^2} + \frac{\mathrm{QN}^2}{\mathrm{PN}^2}\right)\frac{b}{\mathrm{PQ}} \\ &= \frac{d\Omega(\mathrm{PY})}{d\theta} + \frac{d\Omega(\mathrm{PN})}{d\theta}, \end{aligned} \tag{27}$$

after reduction.

Here with s as variable, and $\cos v' = \sigma'$,

$$\left\{\begin{aligned} \Omega(\mathrm{PN}) &= 4\int_{s_2}^{s_1} \frac{s_1-s}{s-\sigma'}\sqrt{\left(\frac{s_2-\sigma'.\sigma'-s_3}{s_1-\sigma'}\right)}\,\frac{ds}{\sqrt{S}} \\ &= 4\int \frac{\frac{1}{2}\sqrt{-\Sigma}}{s-\sigma}\,\frac{ds}{\sqrt{S}} - 4\sqrt{\left(\frac{s_2-\sigma.\sigma'-s_3}{s_1-s_3.s_1-\sigma'}\right)}\int\frac{\sqrt{(s_1-s_3)}\,ds}{\sqrt{S}} \\ &= 2\pi f' + 4\,\mathrm{K}\,\mathrm{zn}\,f'\mathrm{K}' - 4\,\mathrm{K}\,\varkappa^2\frac{\mathrm{sn}\,f'\,\mathrm{cn}\,f'}{\mathrm{dn}\,f'} \\ &= 2\pi(1-f) - 4\,\mathrm{K}\,\mathrm{zn}\,f\mathrm{K}', \\ &\qquad f + f' = 1. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

This is $\Omega(1-f)$, so that

$$(29)\qquad \Omega(1-f)+\Omega(f)=2\pi-\tfrac{1}{4}K\,\mathrm{zn}\,fK\quad\tfrac{1}{4}K\,\mathrm{zn}\,f'K'$$
$$=2\pi-\tfrac{1}{4}Kz'^2\,\mathrm{sn}\,fK'\,\mathrm{sn}\,f'K'=2\pi-P\frac{b}{a}.$$

20. Sometimes r is a convenient variable to use. Then for any point Q on the circle AB at angular distance $AOQ=\theta=2\omega$ from A, and with $AP=r_1$, $BP=r_2$,

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l} r_1^2-r_2^2=4ay,\qquad r_1^2+r_2^2=2(x^2+y^2+a^2),\\ PQ^2=r^2=x^2+y^2+4ay\cos\theta+a^2=r_1^2\cos^2\omega+r_2^2\sin^2\omega\quad r_1^2\Delta^2(\omega,\gamma),\\ \gamma^2=\dfrac{r_2}{r_1},\qquad r_1^2-r^2=(r_1^2-r_2^2)\sin^2\omega,\qquad r^2-r_2^2=(r_1^2-r_2^2)\cos^2\omega,\\ d\theta=2\,d\omega=\dfrac{dr^2}{\sqrt{(r_1^2-r^2,r^2-r_2^2)}},\end{array}\right.$$

$$(2)\qquad \frac{d\theta}{PQ}=\frac{d\theta}{r}=\frac{2\,dr}{\sqrt{(r_1^2-r^2,r^2-r_2^2)}}=\frac{2\,d\omega}{r_1\Delta\omega}=\frac{2\,deG}{r_1}.$$

Applied to the integral for Maxwell's M,

$$(3)\qquad -M=\int_0^{2\pi}\frac{2\pi ay\cos\theta\,d\theta}{PQ}=\pi\int(x^2-y^2+a^2-r^2)\frac{d\theta}{PQ}$$
$$=\tfrac{1}{2}\pi(r_1^2+r_2^2)\int\frac{d\theta}{PQ}-\pi\int PQ\,d\theta$$
$$=\pi(r_1^2+r_2^2)\int_{r_2}^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{R}}-2\pi\int\frac{r^2\,dr}{\sqrt{R}}\qquad(R=r_1^2-r^2,r^2-r_2^2)$$
$$=\pi\frac{r_1^2+r_2^2}{r_1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\omega}{\Delta\omega}-2\pi r_1\int\Delta\omega\,d\omega.$$

$$(4)\qquad \frac{M}{\pi r_1}=2H-(1+\gamma^2)G,$$

as before.

With Minchin's dissection of the circle AB into sectors radiating from M (*Phil. Mag.*, Feb. 1894) and taking r as the variable,

$$\Omega(\mathrm{MQ}) = 4\int_{r_3}^{r_1} \frac{\frac{1}{2}(a^2 - \mathrm{A}^2)}{r^2 - b^2}\,\frac{b\,dr}{\sqrt{\mathrm{R}}} \tag{5}$$

and with a new variable t,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{r^2}{r_1 r_2} &= e^{\zeta} = \frac{t - t_3}{\sqrt{(t_1 - t_3 . t_2 - t_3)}}, \\ \frac{r_1}{r_2} &= e^{u} = \frac{t_1 - t_3}{\sqrt{(\qquad\qquad)}}, \\ \frac{r_2}{r_1} &= e^{-u} = \frac{t_2 - t_3}{\sqrt{(\qquad\qquad)}}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{r_1^2 - r^2}{r_1 r_2} &= \frac{t_1 - t}{\sqrt{(\qquad\qquad)}} = e^{u} - e^{\zeta}, \\ \frac{r^2 - r_2^2}{r_1 r_2} &= \frac{t - t_2}{\sqrt{(\qquad\qquad)}} = e^{\zeta} - e^{-u}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{b^2}{r_1 r_2} &= \frac{\tau - t_3}{\sqrt{(\qquad\qquad)}} = e^{-\delta}, \\ \frac{r^2 - b^2}{r_1 r_2} &= \frac{t - \tau}{\sqrt{(\qquad\qquad)}} = e^{\zeta} - e^{-\delta}, \\ \frac{r_1^2 - b^2}{r_1 r_2} &= \frac{t_1 - \tau}{\sqrt{(\qquad\qquad)}} = e^{u} - e^{-\delta}, \\ \frac{r_2^2 - b^2}{r_1 r_2} &= \frac{t_2 - \tau}{\sqrt{(\qquad\qquad)}} = e^{-u} - e^{-\delta}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$\infty > t_1 > t > t_2 > \tau > t_3 > -\infty, \qquad \delta > u > \zeta > -u,$$

$$\Omega(\mathrm{MQ}) = 4\int_{t}^{t_1} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{(t - \mathrm{T}_b)}}{\tau - t}\,\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} = \int_{-u}^{u} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{ch}\,\delta - \mathrm{ch}\,u}{\mathrm{ch}\,u - \mathrm{ch}\,\zeta}\right)}\,\frac{2e^{-\delta}\,d\zeta}{e^{\zeta} - e^{-\delta}}. \tag{9}$$

Here, to correspond with the preceding,

$$e^{\zeta} = \frac{\mathrm{dn}^2 eG}{\gamma'}, \qquad \gamma = e^{-u}, \qquad \omega = \tfrac{1}{2}\theta = \mathrm{am}\,eG, \tag{10}$$

$$e^{u} - e^{\zeta} = \frac{\gamma^2\,\mathrm{sn}^2 eG}{\gamma'}, \qquad e^{\zeta} - e^{-u} = \frac{\gamma^2\,\mathrm{cn}^2 eG}{\gamma}, \tag{11}$$

$$e^{u} - e^{-\delta} = \frac{\mathrm{dn}^2 fG'}{\gamma'}, \qquad e^{-u} - e^{-\delta} = \gamma\,\mathrm{cn}^2 fG', \qquad e^{-\delta} = \gamma'\,\mathrm{sn}^2 fG'. \tag{12}$$

In the second Quadric Transformation, between γ' and $\varkappa'$.

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{th}\tfrac{1}{2}\delta = \frac{1-e^{-\delta}}{1+e^{-\delta}} = \frac{1-\gamma'\operatorname{sn}^2 fG}{1+\gamma'\operatorname{sn}^2 fG'} = \operatorname{dn} fK, \\ &\operatorname{sn} fK = \frac{\operatorname{sech}\frac{1}{2}\delta}{\varkappa} = \frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}u}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\delta} = \cos\tfrac{1}{2}v, \end{aligned}\right.$$

and so on. Beginning at $f = 0$ on the plate, $f = 1$ on By beyond,

$$(14)\qquad \operatorname{sn}2fG' = \frac{b}{r_2}, \qquad \operatorname{cn}2fG = \frac{a-A}{r_2}, \qquad \operatorname{dn}2fG' = \frac{a+A}{r_1},$$

$$(15)\qquad \frac{a^2-A^2}{r_1 r_2} = \operatorname{cn}2fG'\operatorname{dn}2fG'.$$

which is negative if $f > \frac{1}{2}$,

$$(16)\qquad \frac{b^2}{r_1 r_2} = \frac{\tau - t_3}{\sqrt{(\quad)}} = \gamma'\operatorname{sn}^2 2fG', \qquad \mathrm{ABP} = \operatorname{am}2fG'.$$

$$(17)\qquad \frac{r_2^2-b^2}{r_1 r_2} = \frac{(a-A)^2}{r_1 r_2} = \frac{t_2-\tau}{\sqrt{(\quad)}} = \gamma'\operatorname{cn}^2 2fG',$$

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{r_1^2-b^2}{r_1 r_2} = \frac{(a+A)^2}{r_1 r_2} = \frac{t_1-\tau}{\sqrt{(\quad)}} = \frac{\operatorname{dn}^2 2fG'}{\gamma'}, \\ &\operatorname{dn}2fG' = \cos\mathrm{BAP}. \end{aligned}\right.$$

21. These substitutions between the variables r, t, ζ are recapitulated in the relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{r_1^2-t^2 . r^2-r_2^2}{r_1 r_2 r^2} = \frac{t_1-t . t-t_2}{(t-t_3)\sqrt{(t_1-t_3 . t_2-t_3)}} = 2 . \operatorname{ch}u - \operatorname{ch}\zeta, \\ &2\frac{dr}{r} = d\zeta = \frac{dt}{t-t_3}, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \frac{\sqrt{(r_1 r_2)}\,dr}{\sqrt{\mathrm{R}}} = \frac{\dfrac{\frac{1}{2}dt}{t-t_3}}{\sqrt{\dfrac{t_1-t . t-t_2}{(t-t_3)\sqrt{(t_1-t_3 . t_2-t_3)}}}} = \frac{\sqrt{(t_1-t_3 . t_2-t_3)}\,dt}{\sqrt{\mathrm{T}}}$$

$$= \frac{d\zeta}{\sqrt{(2 . \operatorname{ch}u - \operatorname{ch}\zeta)}} = 2\sqrt{\gamma'}\,d(eG) = \varkappa'\,d(2eK).$$

and

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{r^2 - b^2}{r_1 r_2} = \frac{t - \tau}{\sqrt{(t_1 - t_3 . t_2 - t_3)}} = e^{\tau} - e^{-\delta},\\
&\frac{b}{\sqrt{(r_1 r_2)}} = \frac{\sqrt{(\tau - t_3)}}{\sqrt{(t_1 - t_3 . t_2 - t_3)}} = \frac{\sin v}{\sqrt{(2 . \operatorname{ch} u - \cos v)}},\\
&\frac{r_2^2 - b^2,\ r_1^2 - b^2}{r_1 r_2} = \frac{t_1 - \tau . t_2 - \tau}{\sqrt{(t_1 - t_3 . t_2 - t_3)}},\\
&\frac{a^2 - A^2}{r_1 r_2} = \sqrt{\left(\frac{t_1 - \tau . t_2 - \tau}{t_1 - t_3 . t_2 - t_3}\right)} = e^{-\frac{1}{2}\delta}\sqrt{(2 \operatorname{ch}\delta - \operatorname{ch} u)},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&r^2 = r_1^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta + r_2^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta,\\
&\theta = 2 \sin^{-1}\sqrt{\frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2 - r_2^2}} = 2 \cos^{-1}\sqrt{\frac{r^2 - r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(5)\quad d\theta = \frac{-r\,dr}{\sqrt{R}}, \qquad \frac{d\theta}{PQ} = \frac{-dr}{\sqrt{R}}.
$$

Then from *Trans. A. M. S.*, p. 504,

$$
(6)\quad \Omega(MQ) = \int_0^{2\pi} \frac{A a \cos\theta + a^2}{MQ^2}\,\frac{b\,d\theta}{PQ}
$$

$$
= -\int_{r_2}^{r_1} \frac{r^2 - A^2 + a^2 - b^2}{r^2 - b^2}\,\frac{2\,b\,dr}{\sqrt{R}}
$$

$$
= \int \frac{2\,b\,dr}{\sqrt{R}} + \int \frac{a^2 - A^2}{r^2 - b^2}\,\frac{2\,b\,dr}{\sqrt{R}}.
$$

And from (9), p. 505, *Trans. A. M. S.*, for the incomplete integrals,

$$
(7)\quad \Omega(MQ) - \Omega(PY) = \sin^{-1}\frac{QY . MP}{PY . MQ} = \cos^{-1}\frac{MY . PQ}{PY . MQ} = I,
$$

PY being the perpendicular from P on the tangent at Q; and I is the angle between the planes PQY, PQO.

As this angle oscillates and does not revolve, in the complete integrals

$$
(8)\quad \Omega(MQ) - \Omega(PY) = \Phi = 2\pi - \Omega(PN) = 2\pi - \Omega.
$$

22. Referring to *Electromagnetic Integrals*, p. 49 and for fig. 2 and 3, repeated here

$$\mathrm{am}\, f\mathrm{K}' = \psi = \mathrm{DEP} = \mathrm{DPB}, \qquad \text{and then} \qquad \mathrm{DEP} = \mathrm{am}\,(1-f)\mathrm{K}',$$

and p. 43, on fig. 3,

$$\mathrm{am}\, 2f\mathrm{G}' = \chi = \mathrm{ABP}.$$

Then to show $\mathrm{am}\, f\mathrm{G}' = \xi$ on the figure, and to draw the coaxial circle es touching EP, the point of contact s will be where Bs will bisect the angle ABP; and if the tangent at the lowest point e of this circle cuts the circle on ED in h,

$$\xi = \mathrm{am}\, f\mathrm{G}' = \mathrm{AB}h.$$

The angles on fig. 2 for modulus γ or $\varkappa$ are shown by

$$\mathrm{ABQ} = \tfrac{1}{2}\theta = \omega = \mathrm{am}\, e\mathrm{G}, \qquad \mathrm{AB}q = \mathrm{am}\,(1-e)\mathrm{G}$$

and

$$\mathrm{AEQ} = \varphi = \mathrm{am}\, 2e\mathrm{K} \qquad \text{(p. 49)}.$$

The geometrical interpretation of the integral for $\mathrm{P}_n(u)$ is given on p. 56

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{P}_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\mathrm{EA}.\mathrm{EB}}{\mathrm{EQ}^2}\right)^{n+\frac{1}{2}} d\theta$$

and a similar interpretation can be constructed for $\mathrm{Q}_n(u)$ in § **14**.

In a dynamical interpretation, where S in fig. 2 oscillates from the level of E, or Q follows it, round the circle on AB with velocity due to the level of E, the time $t = e\mathrm{T}$, T denoting the beat of S or period of Q. And on fig. 3, if P describes the circle on DE, with upward gravity, and velocity due to the level of O, proportional to AP or BP, $t = f\mathrm{T}'$, T′ denoting the periodic time of P.

The variable θ' in § **14** may be interpreted dynamically by putting $\frac{1}{2}\theta' = nt$ in the motion of a particle S round the circle on OD with velocity just sufficient to reach D in a gravity field, the particle making $\frac{n}{\pi}$ beats in small oscillation at O. Then with

$$\mathrm{ODS} = \tfrac{1}{2}\theta, \ \cos\tfrac{1}{2}\theta\, \mathrm{cb}\, \tfrac{1}{\gamma} = 1.$$

23. With dg, eh the segments of the circle on DE on the tangents at the highest and lowest point of the inner coaxial circle on de with centre f, gBh is a straight line, and $DBg = \operatorname{am} fG'$.

Fig. 2.

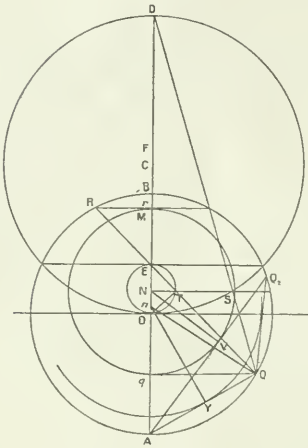
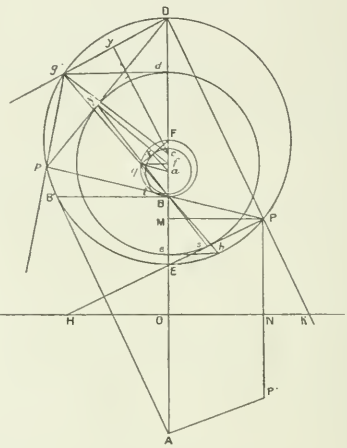


Fig. 3.



The perpendicular Fq on gh bisects gh, so that f and q are at the same level, and

$$(1)\qquad \frac{Ff}{FB} = \sin^2 FBq = \operatorname{sn}^2 fG', \qquad \frac{FB}{FE} = \gamma', \qquad \frac{Ff}{FE} = \gamma' \operatorname{sn}^2 fG',$$

$$(2)\qquad \frac{1-\gamma' \operatorname{sn}^2 fG'}{1+\gamma' \operatorname{sn}^2 fG'} = \frac{FE - Ff}{FE + Ff} = \frac{Ef}{fD} = \frac{pr}{rD} = \frac{pB}{BD} = \operatorname{dn} fK',$$

with

$$DEp = DPB = \operatorname{am} fK',$$

a Quadric Transformation; and

$$(3)\qquad \frac{\operatorname{dn}^2 fG'}{1+\gamma'} = \frac{\operatorname{dn} fK' + z}{1 + \operatorname{dn} fK'}.$$

The curvilinear angle DBP made by BD and the circle BPA is $v = \mathrm{APB}$, in the alternate segment; and then

$$(4)\quad \begin{cases} \psi = \mathrm{am}\, fK' = \mathrm{DE}p = \mathrm{DPB}, & \frac{1}{2}\pi - \psi = \mathrm{EPB} = \frac{1}{2}\mathrm{APB} = \frac{1}{2}v, \\ v = \mathrm{APB} = 2\mathrm{EPB} = 2\left(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{BPD}\right) = \pi - 2\psi = \pi - 2\,\mathrm{am}\, fK', \end{cases}$$

Equation (10), § **19**, is interpreted geometrically with

$$(5)\qquad v' = \text{curvilinear angle } \mathrm{DB}p = \text{angle } \mathrm{B}p\mathrm{A},$$

in the alternate segment,

$$= 2\mathrm{B}p\mathrm{E} = \pi - 2\mathrm{B}p\mathrm{D} = \pi - 2\mathrm{PED} = \pi - 2\,\mathrm{am}(1-f)K',$$

$$(6)\qquad \frac{1}{2}v' = \mathrm{EDP}, \qquad \frac{1}{2}v = \mathrm{ED}p;$$

$$(7)\qquad \tan\frac{1}{2}v \tan\frac{1}{2}v' = \frac{\mathrm{E}p.\mathrm{EP}}{\mathrm{D}f.\mathrm{DP}} = \frac{\mathrm{EY}}{\mathrm{DZ}} = \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{DB}} = z = \mathrm{th}\frac{1}{2}u.$$

where EY, DZ are the perpendiculars on Pp, and it is the equivalent of the elliptic function relation

$$(8)\qquad \tan\frac{1}{2}v \tan\frac{1}{2}v' = \frac{1}{\mathrm{tn}\, fK' \,\mathrm{tn}(1-f)K'} = \mathrm{th}\frac{1}{2}u = z,$$

$$(9)\qquad z\,\mathrm{tn}\, fK' \,\mathrm{tn}(1-f)K' = 1.$$

Proceeding with the geometrical interpretation of the formulas of Quadric Transformation,

$$(10)\qquad \mathrm{D}f = \mathrm{DF} + \mathrm{F}f = \mathrm{DF}(1 + \gamma' \,\mathrm{sn}^2 fG'),$$

$$(11)\qquad \frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{DB}} = \frac{pr}{p\mathrm{B}} = \frac{dg}{g\mathrm{B}} = \mathrm{sn}\, fG',$$

by the properties of coaxial circles; and if r is the point of contact with Dp.

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{DB} = \mathrm{DF} + \mathrm{FB} = \mathrm{DF}(1 + \gamma'), \qquad \frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{DB}} = \frac{dg}{g\mathrm{B}} = \mathrm{sn}\, fG', \\ \mathrm{D}r = \mathrm{DF}(1 + \gamma')\,\mathrm{sn}\, fG'; \end{cases}$$

$$(13)\qquad \mathrm{sn}\, fK' = \sin \mathrm{DE}p = \sin \mathrm{DF}r = \frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{DF}} = \frac{(1+\gamma')\,\mathrm{sn}\, fG'}{1 + \gamma' \,\mathrm{sn}^2 fG'},$$

$$(14)\quad fr^2 = fd^2 = f\mathrm{B}.f\mathrm{A} = \mathrm{FB}\,\mathrm{cn}^2 fG'.\mathrm{FA}\,\mathrm{dn}^2 fG' = \mathrm{FD}^2\,\mathrm{cn}^2 fG'\,\mathrm{dn}^2 fG',$$

$$(15)\qquad \mathrm{cn}\, fK' = \cos \mathrm{DE}p = \cos \mathrm{D}fr = \frac{fr}{\mathrm{D}f} = \frac{\mathrm{cn}\, fG'\,\mathrm{dn}\, fG'}{1 + \gamma' \,\mathrm{sn}^2 fG'}.$$

Again, with Ft bisecting Pp et wight angles,

$$(16)\qquad \frac{\mathrm{dn}^2 f\mathrm{K}'}{z} = \frac{\mathrm{dn}\, f\mathrm{K}'}{\mathrm{dn}(1-f)\mathrm{K}'} = \frac{p\mathrm{B}}{\mathrm{BP}} = \frac{pt}{pt} \quad \frac{t\mathrm{B}}{t\mathrm{B}},$$

$$(17)\qquad \begin{cases} pt = \frac{1}{2}\mathrm{P}p = \frac{1}{2}\mathrm{ED}\,\mathrm{dn}\,2f\mathrm{G} = \mathrm{FD}\,\mathrm{dn}\,2f\mathrm{G}', \\ t\mathrm{B} = \mathrm{FB}\,\mathrm{cn}\,2f\mathrm{G}' = \mathrm{FD}.\gamma'\,\mathrm{cn}\,2f\mathrm{G}'; \end{cases}$$

$$(18)\qquad \frac{\mathrm{dn}^2 f\mathrm{K}'}{z} = \frac{\mathrm{dn}\,2f\mathrm{G}' + \gamma'\,\mathrm{cn}\,2f\mathrm{G}}{\mathrm{dn}\,2f\mathrm{G} - \gamma'\,\mathrm{cn}\,2f\mathrm{G}'} = \frac{1+\gamma'\,\mathrm{sn}(1-2f)\mathrm{G}'}{1-\gamma'\,\mathrm{sn}(1-2f)\mathrm{G}'}.$$

If B″B is horizontal, AB″ the tangent from A,

$$(19)\qquad \gamma = \cos\frac{\mathrm{B''B}}{\mathrm{B''A}} = \cos\mathrm{AB''B}$$

AB″B is the modular angle for γ. B″E bisects the angle BB″A.

And so all the formulas of the complementary Quadric Transformation can receive a geometrical interpretation on fig. 3, with the notation, as above

$$\psi = \mathrm{DE}p = \mathrm{D}fr = \mathrm{am}\,f\mathrm{K}, \qquad \chi = \mathrm{DB}p = \mathrm{am}\,2f\mathrm{G}', \qquad \mathrm{DB}r = \frac{1}{2}\mathrm{am}\,f\mathrm{G}',$$
$$\xi = \mathrm{DB}g = \mathrm{am}\,f\mathrm{G}'.$$

24. The Duplication formulas for $f\mathrm{K}'$ and $\frac{1}{2}f\mathrm{K}'$ are shown on the circle EPD, where

$$\psi = \mathrm{DP}p = \mathrm{am}\,f\mathrm{K}', \qquad \varphi = \mathrm{DE}g = \mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}f\mathrm{K},$$

so that pg, $g\mathrm{D}$ are tangents to an inner concyclic circle; here is the kernel of the geometrical interpretation.

The centre of this circle is at c on gc, the bisector of the angle

$$\mathrm{D}gp = \pi - \mathrm{DE}p = \pi - \mathrm{am}\,f\mathrm{K},$$

so that

$$\mathrm{D}gc = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\mathrm{am}\,f\mathrm{K}, \qquad gc\mathrm{D} = \frac{1}{2}\mathrm{am}\,f\mathrm{K} = \frac{1}{2}\psi,$$

of the circle touches Dg in y; and then

$$\mathrm{D}c\mathrm{D} = \mathrm{DE}g = \mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}f\mathrm{K}' = \omega, \qquad \text{and} \qquad \mathrm{D}y = \mathrm{D}c\sin\omega;$$

$$(0)\qquad \frac{gy}{g\mathrm{D}} = \frac{g\mathrm{B}}{\mathrm{BD}} = \mathrm{dn}\,\tfrac{1}{2}f\mathrm{K}' = \Delta\omega.$$

and

$$(2)\qquad gy = Dc\sin\varphi\,\Delta\varphi, \qquad cy = Dc\cos\varphi;$$

$$(3)\qquad gc^2 = Dc^2(\sin^2\varphi\,\Delta^2\varphi + \cos^2\varphi) = Dc^2.D, \qquad D = 1 - \gamma'^2\sin^2\varphi;$$

$$(4)\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{\cos\varphi} = \frac{cD}{cg} = \frac{1}{\sqrt{D}}, \qquad \cos\frac{1}{2}\operatorname{am} fK = \frac{\operatorname{cn}\frac{1}{2}fK}{\sqrt{D}};$$

$$(5)\qquad \frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\sin\varphi} = \frac{gy}{gc}\,\frac{cD}{cg} = \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{D}}, \qquad \sin\frac{1}{2}\operatorname{am} fK = \frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}fK\operatorname{dn}\frac{1}{2}fK}{\sqrt{D}};$$

$$(6)\qquad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi}{\operatorname{tang}\varphi} = \frac{gy}{gD} = \Delta\varphi, \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am} fK = \operatorname{tn}\frac{1}{2}fK\operatorname{dn}\frac{1}{2}fK;$$

$$(7)\qquad \operatorname{sn} fK = 2\sin\frac{1}{2}\operatorname{am} fK\cos\frac{1}{2}\operatorname{am} fK = \frac{2\operatorname{sn}\frac{1}{2}fK\operatorname{cn}\frac{1}{2}fK\operatorname{dn}\frac{1}{2}fK}{D}.$$

The Duplication formulas of fG' and $2fG'$ are shown on the circle $FqtB$, where $FBq = \operatorname{am} fG'$, $FBt = \operatorname{am} 2fG'$, so that Fq. qt are tangents to an interior concyclic circle; here again is the kernel of the geometry.

The centre of this circle is at a on qa, the bisector of the angle

$$Fqt = \pi - \operatorname{am} 2fG',$$

so that

$$Fqa = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\operatorname{am} 2fG', \qquad qaz = \frac{1}{2}\operatorname{am} 2fG' = \frac{1}{2}\chi,$$

if the circle touches Fq in z, and then

$$Faz = FBq = \operatorname{am} fG' = \xi.$$

Then

$$(8)\qquad Fz = Fa\sin\xi, \qquad qz = Fa\sin\xi\,\Delta\xi, \qquad az = Fa\cos\xi;$$

$$(9)\qquad aq^2 = Fa^2(\sin^2\xi\,\Delta^2\xi + \cos^2\xi) = Fa^2.D, \qquad D = 1 - \gamma'^2\sin^2\xi;$$

$$(10)\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}\chi}{\cos\xi} = \frac{aF}{aq} = \frac{1}{\sqrt{D}}, \qquad \cos\frac{1}{2}\operatorname{am} 2fG' = \frac{\operatorname{cn} fG}{\sqrt{D}};$$

$$(11)\qquad \frac{\sin\frac{1}{2}\chi}{\sin\xi} = \frac{qz}{qa}\,\frac{aF}{Fz} = \frac{\Delta\xi}{\sqrt{D}}, \qquad \sin\frac{1}{2}\operatorname{am} 2fG' = \frac{\operatorname{sn} fG'\operatorname{dn} fG'}{\sqrt{D}};$$

and

$$(12)\qquad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\chi}{\operatorname{tang}\xi} = \frac{\eta z}{\mathrm{F}z} = \Delta\xi, \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}2fG' = \operatorname{tn}fG'\operatorname{dn}fG';$$

$$(13)\qquad \operatorname{sn}2fG' = 2\sin\frac{1}{2}\operatorname{am}2fG'\cos\frac{1}{2}\operatorname{am}2fG' = \frac{2\operatorname{sn}fG'\operatorname{cn}fG'\operatorname{dn}fG'}{\mathrm{D}}.$$

Similar geometrical interpretation can be given in fig. 2 of the Duplication formulas for eG and $2eG$, where $ABQ = \operatorname{am}eG$, $ABQ_2 = \operatorname{am}2eG$, and N is the centre of the circle on the diameter qr, and AQ_2 the tangent from A; also of the Quadric Transformation between

$$\varphi = AEQ = \operatorname{am}2eK,$$

and

$$\omega = ABQ = \operatorname{am}eG, \qquad \omega' = ABR = \operatorname{am}(1-e)G.$$

Fig. 2 and 3 may be supposed turned about AB into planes at right angles, so as to represent circles linked like the electric and magnetic circuit.

Then the vector product of the electric and magnetic flux is Poynting's vector of flow of energy.

Lignes de discontinuité des solutions de certaines équations de Fredholm;

PAR GASTON JULIA.

1. On envisage une équation de Fredholm

$$f(x) + \lambda \int_C N(x, z) f(z)\, dz = \varphi(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction holomorphe dans une certaine région $\mathcal{R}$ du plan x. C est une ligne intérieure à $\mathcal{R}$ joignant deux points fixes a et b de la région $\mathcal{R}$. Le noyau $N(x, z)$ est supposé analytique lorsque x et z sont intérieurs à la région $\mathcal{R}$. On suppose cependant qu'il puisse s'écrire

$$N(x, z) = \frac{G(x, z)}{H(x, z)},$$

$G(x, z)$ et $H(x, z)$ étant deux fonctions holomorphes dans $\mathcal{R}$ telles que pour certaines valeurs de x et z intérieures à $\mathcal{R}$, la fonction $H(x, z)$ puisse être nulle. Pour préciser, nous supposons que lorsque x décrit une certaine courbe Γ intérieure à $\mathcal{R}$, allant de α à β, une racine simple z de l'équation $H(x, z) = 0$ décrive la courbe C allant de a à b. Il est clair que si x est choisi sur Γ les formules ordinaires pour la résolution de l'équation (1) tombent en défaut, mais elles sont valables si x, sans être sur Γ, est voisin d'un point ξ de Γ, d'un côté ou de l'autre de cette courbe. Le problème qu'on se pose est le suivant : Partons d'un point x_0 voisin de ξ et d'un certain côté de Γ, la solution $f(x)$ est parfaitement déterminée par les formules de Fredholm; faisons varier x dans la région $\mathcal{R}$, en longeant Γ et de façon que jamais une racine z de $H(x, z) = 0$ ne rencontre C, et de façon que l'on arrive en x_0 voisin

de ξ et de l'autre côté de Γ par rapport à x_0. Y a-t-il une relation simple entre $f(x_0)$ et $f(x'_0)$ lorsque x_0 et x'_0 sont infiniment voisins de ξ ? C'est un problème analogue à celui qui se pose dans l'étude des coupures des intégrales définies sur lesquelles Hermite attira l'attention des géomètres. Le résultat, dans les hypothèses où nous allons nous placer, rappelle tout à fait les résultats d'Hermite. On va montrer que la différence $f(x_0) - f(x'_0)$ a une limite facilement calculable, lorsque x et x' tendent vers ξ.

2. La solution $f(x)$ de l'équation (1) s'obtient par

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_\Gamma \mathfrak{N}(x, z, \lambda)\, \varphi(z)\, dz, \tag{2}$$

où $\mathfrak{N}(x, z, \lambda)$ est le noyau résolvant

$$\mathfrak{N}(x, z, \lambda) = \frac{\Theta(x, z, \lambda)}{\Theta(\lambda)}, \tag{3}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \Theta(x, z, \lambda) = N(x, z) + \displaystyle\sum_1^\infty \frac{\lambda^n}{n!} \overbrace{\int_C \cdots \int_C}^{n} N\begin{pmatrix} x z_1 z_2 \ldots z_n \\ z z_1 z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1\, dz_2 \ldots dz_n, \\ \Theta(\lambda) = 1 + \displaystyle\sum_1^\infty \frac{\lambda^n}{n!} \underbrace{\int_C \cdots \int_C}_{n} N\begin{pmatrix} z_1 z_2 \ldots z_n \\ z_1 z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1\, dz_2 \ldots dz_n, \end{cases}$$

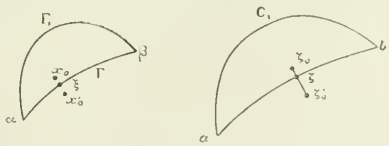
$$(5)\quad N\begin{pmatrix} x z_1 \ldots z_n \\ z z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} N(x, z) & N(x, z_1) & \ldots & N(x, z_n) \\ N(z_1, z) & N(z_1, z_1) & \ldots & N(z_1, z_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ N(z_n, z_1) & N(z_n, z_2) & \ldots & N(z_n, z_n) \end{vmatrix}.$$

Nous supposerons essentiellement que $N(z_i, z_k)$ est holomorphe quels que soient z_i, z_k dans une petite région $\mathcal{R}_1$ contenant à son intérieur la courbe C. Ce qui revient à dire que *lorsque x décrit la région $\mathcal{R}_1$, toutes les racines z de l'équation* $H(x, z) = 0$ *restent extérieures à cette région $\mathcal{R}_1$*. Cette supposition revient en somme à admettre que la solution est donnée, pour x non sur Γ, par les formules même de Fredholm. Elle écarte des noyaux $N(x, z)$ tels que $\frac{1}{x - z}$ pour lesquels la représentation même de la solution par les formules de

Fredholm (2), (3), (4) présente déjà des difficultés considérables, sur lesquelles on n'a pas pour but de s'attarder ici.

Dans les hypothèses faites, la courbe Γ est tout entière extérieure à la région $\mathcal{R}_1$ contenant C, et lorsque x tend vers un point ξ de Γ, on voit que les difficultés naissent de la présence des termes $N(x, z_i)$ dans $\Phi(x, z, \lambda)$, ces termes devenant infinis pour une certaine valeur ζ de z_i correspondant à ξ par $H(\xi, \zeta) = 0$. Lorsque ξ décrira une certaine région ρ entourant Γ, le point unique ζ qui lui correspond par hypothèse décrira la région $\mathcal{R}_1$.

5. Pour comparer commodément les valeurs $f(x_0)$ et $f(x_0')$ de la solution (1), considérons les points ζ_0 et ζ_0' voisins de ζ que l'équation $H(x, z) = 0$ fait correspondre respectivement à x_0 et x_0'. Ils sont situés de part et d'autre de C comme l'indique la figure. Considérons



un deuxième chemin C_1, allant de a à b, dans la région $\mathcal{R}_1$ déjà citée : C_1 sera suffisamment voisin de C, C et C_1 délimiteront une aire simplement connexe contenant ζ_0 et laissant à l'extérieur ζ_0'. Nous allons *comparer les intégrales des formules* (2) *et* (4) *à des intégrales analogues prises le long de* C_1.

Aucune difficulté pour les intégrales du type

$$\int_{C_1} \cdots \int_{C_1} N\begin{pmatrix} z_1 z_2 \ldots z_n \\ z_1 z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 dz_2 \ldots dz_n.$$

z_i et z_k étant quelconques dans $\mathcal{R}_1$, tous les termes $N(z_i, z_k)$ sont holomorphes, par conséquent

$$\int_{C} \cdots \int_{C} = \int_{C_1} \cdots \int_{C_1}.$$

c'est-à-dire que $\Phi(\lambda)$ *ne change pas* si les intégrales qu'il contient sont prises suivant C_1 et non suivant C.

4. Considérons, dans $\Phi(x, z, \lambda)$, l'intégrale type

$$I(x, z) = \int_C \cdots \int_C N\begin{pmatrix} x\, z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 \ldots dz_n,$$

et comparons-la à

$$I_1(x, z) = \int_{C_1} \cdots \int_{C_1} N\begin{pmatrix} x\, z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 \ldots dz_n.$$

On voit d'abord dans

$$\int_{C_1} \begin{vmatrix} N(x\, z) & N(x\, z_1) & \ldots & N(x\, z_n) \\ N(z_1 z) & N(z_1 z_1) & \ldots & N(z_1 z_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N(z_n z) & N(z_n z_1) & \ldots & N(z_n z_n) \end{vmatrix} dz_n,$$

que seul le terme $N(x z_n)$ du déterminant crée des difficultés. Il admet un pôle simple, qui est ζ_0 ou ζ'_0 selon que x est en x_0 ou en x'_0. Nous allons supposer d'abord qu'on donne à x la valeur x_0. Entre les chemins C et C_1 figure donc un pôle de $N(x_0, z_n)$ qui est $z_n = \zeta_0$; le résidu correspondant est

$$\frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_z(x_0, \zeta_0)},$$

il est alors visible que

$$\int_{C_1} \begin{vmatrix} N(x\, z) & N(x\, z_1) & \ldots & N(x\, z_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N(z_n z) & \ldots & \ldots & N(z_n z_n) \end{vmatrix} dz_n$$
$$= \int_C N\begin{pmatrix} x\, z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_n + (-1)^{n+1} \int_{C+C_1} N(x\, z_n)\, N\begin{pmatrix} z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_{n-1} \end{pmatrix} dz_n.$$

$C + C_1$ désignant le contour fermé constitué par C et C_1, décrit dans le sens positif (*voir* la figure 1), ou bien

$$\int_{C_1} N\begin{pmatrix} x_0\, z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z\, z_1\, z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_n$$
$$= \int_C N\begin{pmatrix} x_0\, z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z\, z_1\, z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_n + (-1)^{n+1} . 2i\pi \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_z(x_0, z_0)} N\begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots z_{n-1}\, \zeta_0 \\ z\, z_1 \ldots z_{n-1} \end{pmatrix}.$$

D'une façon générale, puisque

$$N\begin{pmatrix} x_0\, z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} = N(x_0 z)\, N\begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z_1\, z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} - N(x_0 z_1)\, N\begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z\, z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} + \ldots$$
$$+ (-1)^n N(x_0 z_n)\, N\begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_{n-1} \end{pmatrix},$$

et puisque le terme

$$(-1)^i \qquad N(x_0 z_i)\, N\begin{pmatrix} z_1 z_2 \ldots z_{i-1} z_i \ldots z_n \\ z\ z_1 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_n \end{pmatrix}$$

$$N(x_0 z_i)\, N\begin{pmatrix} z_i z_1 \ldots z_{i-1} z_{i-1} \ldots z_n \\ z\ z_1 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_n \end{pmatrix}$$

n'est altéré, dans la substitution du chemin C_i au chemin C, que par l'intégration relative à z_i, les autres intégrations donnant le même résultat sur C et sur C_i puisque

$$N\begin{pmatrix} z_1 z_2 \ldots z_{i-1} z_i \ldots z_n \\ z\ z_1 \ldots z_{i-1} z_{i-1} \ldots z_n \end{pmatrix}$$

reste holomorphe quels que soient $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_i, \ldots, z_n$ dans $\mathfrak{R}_i$ il vient immédiatement

$$\int_{C_i} \overset{n}{\cdots} \int_{C_i} N\begin{pmatrix} x_0 z_1 z_2 \ldots z_n \\ z\ z_1 z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 \ldots dz_n$$

$$= \int_{C} \overset{n}{\cdots} \int_{C} N\begin{pmatrix} x_0 z_1 z_2 \ldots z_n \\ z\ z_1 z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 \ldots dz_n + 2i\pi \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H_\zeta'(x_0, \zeta_0)} \Sigma,$$

où

$$\Sigma = \int_{C} \overset{n-1}{\cdots} \int_{C} N\begin{pmatrix} \zeta_0 z_2 \ldots z_n \\ z\ z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_2 \ldots dz_n$$

$$+ \int_{C} \overset{n-1}{\cdots} \int_{C} N\begin{pmatrix} \zeta_0 z_1 z_3 \ldots z_n \\ z\ z_1 z_3 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 dz_3 \ldots dz_n + \ldots$$

$$+ \int_{C} \overset{n-1}{\cdots} \int_{C} N\begin{pmatrix} \zeta_0 z_1 z_2 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_n \\ z\ z_1 z_2 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 dz_2 \ldots dz_{i-1} dz_{i+1} \ldots dz_n + \ldots$$

$$+ \int_{C} \overset{n-1}{\cdots} \int_{C} N\begin{pmatrix} \zeta_0 z_1 z_2 \ldots z_{n-1} \\ z\ z_1 z_2 \ldots z_{n-1} \end{pmatrix} dz_1 dz_2 \ldots dz_{n-1}.$$

Or, il est visible que les n intégrales qui figurent dans Σ ne diffèrent

que par la dénomination des *lettres d'intégration*, donc

$$\Sigma = n \int_{C_1} \cdots \int_{C_1} N\begin{pmatrix} \zeta_1 z_1 \ldots z_{n-1} \\ z z_1 \ldots z_{n-1} \end{pmatrix} dz_1 dz_2 \ldots dz_{n-1}.$$

Désignons par $\mathfrak{N}_1(x, z, \lambda)$ le noyau (3) calculé à l'aide du chemin d'intégration C_1 et $\mathfrak{N}(x, z, \lambda)$ le même noyau calculé à l'aide de C. On aura évidemment, puisque $\mathfrak{D}(\lambda)$ n'a pas changé,

$$(6) \qquad \mathfrak{N}_1(x_0, z, \lambda) = \mathfrak{N}(x_0, z, \lambda) + 2i\pi\lambda \frac{\mathfrak{i}(x_0, \zeta_0)}{\mathrm{H}_\zeta(x_0, \zeta_0)} \mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda).$$

5. Désignons par $f_1(x)$ ce que devient $f(x)$ si le chemin C_1 est substitué à C.

$$f_1(x) = \varphi(x) - \lambda \int_{C_1} \mathfrak{N}_1(x, z, \lambda) \varphi(z)\, dz.$$

Il existe une relation simple entre $f(x_0)$ et $f_1(x_0)$:

$$\begin{aligned} f_1(x_0) &= \varphi(x_0) - \lambda \int_{C_1} \mathfrak{N}_1(x_0, z, \lambda) \varphi(z)\, dz \\ &= \varphi(x_0) - \lambda \int_{C_1} \mathfrak{N}(x_0, z, \lambda) \varphi(z)\, dz \\ &\quad - 2i\pi\lambda^2 \frac{\mathfrak{i}(x_0, \zeta_0)}{\mathrm{H}_\zeta(x_0, \zeta_0)} \int_{C_1} \mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda) \varphi(z)\, dz. \end{aligned}$$

L'expression de

$$\mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda) = \frac{\mathfrak{D}(\zeta_0, z, \lambda)}{\mathfrak{D}(\lambda)}$$

avec

$$\mathfrak{D}(\zeta_0, z, \lambda) = \mathfrak{N}(\zeta_0, z) - \sum_1^\infty \frac{\lambda^n}{n!} \int_C \cdots \int_C N\begin{pmatrix} \zeta_0 z_1 \ldots z_n \\ z z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 dz_2 \ldots dz_n$$

prouve, puisque ζ_0 est dans la région $\mathfrak{R}_1$, que $\mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda)$ est holomorphe en z dans $\mathfrak{R}_1$; par conséquent,

$$\int_{C_1} \mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda) \varphi(z)\, dz = \int_C \mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda) \varphi(z)\, dz.$$

Au contraire, considérons dans

$$\int_{C_1} \mathfrak{N}(x_0, z, \lambda) \varphi(z)\, dz$$

le terme général

$$\frac{1}{\Theta(\lambda)}\frac{\lambda^n}{n!}\int_{C_1}\varphi(z)\,dz\overbrace{\int_C\cdots\int_C}^{n}\mathrm{N}\begin{pmatrix}x_0 z_1\ldots z_n\\ z\, z_1\ldots z_n\end{pmatrix}dz_1\,dz_2\ldots dz_n.$$

Le terme

$$\mathrm{N}\begin{pmatrix}x_0 z_1\ldots z_n\\ z\, z_1\ldots z_n\end{pmatrix}$$

admet le pôle simple $z=\zeta_0$ entre C et C_1. Un calcul tout analogue à celui qu'on a fait précédemment prouvera que

$$\int_{C_1}\varphi(z)\,dz\overbrace{\int_C\cdots\int_C}^{n}\mathrm{N}\begin{pmatrix}x_0 z_1\ldots z_n\\ z\, z_1\ldots z_n\end{pmatrix}dz_1\ldots dz_n$$

$$=\overbrace{\int_C\cdots\int_C}^{n+1}\varphi(z)\,\mathrm{N}\begin{pmatrix}x_0 z_1\ldots z_n\\ z\, z_1\ldots z_n\end{pmatrix}dz\,dz_1\ldots dz_n$$

$$-2i\pi\overbrace{\int_C\cdots\int_C}^{n}\frac{G(x_0,\zeta_0)}{H'_\zeta(x_0,\zeta_0)}\varphi(\zeta_0)\,\mathrm{N}\begin{pmatrix}z_1\ldots z_n\\ z_1\ldots z_n\end{pmatrix}dz_1\ldots dz_n.$$

Donc

$$\int_{C_1}\mathfrak{N}(x_0,z,\lambda)\,\varphi(z)\,dz=\int_C\mathfrak{N}(x_0,z,\lambda)\,\varphi(z)\,dz-2i\pi\,\varphi(\zeta_0)\frac{G(x_0,\zeta_0)}{H'_\zeta(x_0,\zeta_0)}.$$

En définitive

$$f_1(x_0)=\left[\varphi(x_0)-\lambda\int_C\varphi(z)\,\mathfrak{N}(x_0,z,\lambda)\,dz\right]+2i\pi\lambda\frac{G(x_0,\zeta_0)}{H'_\zeta(x_0,\zeta_0)}\varphi(\zeta_0)$$

$$-2i\pi\lambda^2\frac{G(x_0,\zeta_0)}{H'_\zeta(x_0,\zeta_0)}\int_C\mathfrak{N}(\zeta_0,z,\lambda)\,\varphi(z)\,dz$$

$$=f(x_0)+2i\pi\lambda\frac{G(x_0,\zeta_0)}{H'_\zeta(x_0,\zeta_0)}\varphi(\zeta_0)+2i\pi\lambda\frac{G(x_0,\zeta_0)}{H'_\zeta(x_0,\zeta_0)}[f(\zeta_0)-\varphi(\zeta_0)],$$

car

$$f(x_0)=\varphi(x_0)-\lambda\int_C\varphi(z)\,\mathfrak{N}(x_0,z,\lambda)\,dz$$

et

$$f(\zeta_0)-\varphi(\zeta_0)=-\lambda\int_C\varphi(z)\,\mathfrak{N}(\zeta_0,z,\lambda)\,dz.$$

Toutes réductions faites, il vient

$$(7)\qquad \boxed{f_1(x_0) = f(x_0) + 2i\pi\lambda \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H_\zeta(x_0, \zeta_0)} f(\zeta_0)}$$

6. Envisageons maintenant $f(x'_0)$ et $f_1(x'_0)$. Ils s'expriment tous deux par la formule (2) où x est remplacé par x'_0, mais dans f toutes les intégrales sont prises sur C et dans f_1 elles sont prises sur C_1. Les singularités des fonctions à intégrer proviennent toutes de termes $N(x'_0, z_i)$ qui n'admettent dans $\mathcal{R}_1$ qu'un pôle ζ'_0. Ce pôle est extérieur à l'aire délimitée par C et C_1. Les intégrales prises sur C ou sur C_1 ont les mêmes valeurs

$$(8)\qquad \boxed{f(x'_0) = f_1(x'_0)}$$

7. Il faut maintenant faire tendre x_0 et x'_0 vers le point ξ de Γ, alors ζ_0 tendra vers ζ, point de C. $f(\zeta_0)$ tendra vers une limite $f(\zeta)$ parfaitement définie et donnée par la formule (2) pour $x = \zeta$. [Car les singularités de tous les termes de (2) lorsque $x = \zeta_0$ sont données par la seule équation $H(\zeta_0, z) = 0$, elles sont donc extérieures à la région $\mathcal{R}_1$ où ζ_0 se déplace.]

Envisageons $f_1(x_0)$ et $f_1(x'_0)$; en vertu de leur expression par la formule (2), où les intégrales seraient prises suivant C_1, tous les termes $N\begin{pmatrix} x\, z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix}$ sont holomorphes en x lorsque $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont sur C_1 et lorsque x est dans un voisinage assez restreint de ξ, par conséquent $f_1(x_0)$ et $f_1(x'_0)$ tendent vers une limite bien déterminée $f_1(\xi)$ donnée par (2) où toutes les intégrales seraient prises suivant C_1. Comparant alors

$$f(x'_0) = f_1(x_0)$$

et

$$f(x_0) = f_1(x_0) - 2i\pi\lambda \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H_\zeta(x_0, \zeta_0)} f(\zeta_0),$$

on voit que $f(x_0)$ et $f(x'_0)$ ont respectivement les limites

$$(9)\qquad \begin{cases} f(x_0) \to f_1(\xi) - 2i\pi\lambda \dfrac{G(\xi, \zeta)}{H_\zeta(\xi, \zeta)} f(\zeta), \\ f(x'_0) \to f_1(\xi), \end{cases}$$

où, rappelons-le,

$$f_1(x) = \varphi(x) - \lambda \int_{C_1} \mathcal{N}_1(x, z, \lambda)\, \varphi(z)\, dz.$$

Par suite,

$$\boxed{\lim[f(x'_0)^{\varepsilon} - f(x_0)] = 2i\pi\lambda \frac{G(\zeta, \zeta)}{H_\zeta(\zeta, \zeta)} f(\zeta)} \tag{10}$$

c'est-à-dire en somme que la *ligne* Γ *est, pour la solution* $f(x)$ *de* (1), *une coupure artificielle du type des coupures des intégrales définies d'Hermite, au delà desquelles* $f(x)$ *est prolongeable analytiquement.*

8. Le résultat précédent est susceptible de vérification directe. Reprenons l'équation (2)

$$f(x) + \lambda \int_C N(x, z) f(z)\, dz = \varphi(x),$$

où nous donnerons à x successivement les valeurs x_0 et x'_0. On aura

$$f(x'_0) - f(x_0) = -\lambda \int_C [N(x'_0, z) - N(x_0, z)] f(z)\, dz + \varphi(x'_0) - \varphi(x_0).$$

Lorsque x_0 et x'_0 tendent vers ξ, $\varphi(x'_0) - \varphi(x_0)$ tend vers zéro car φ est holomorphe dans $\mathcal{R}$ et l'on peut se borner à étudier l'intégrale

$$I = \int_C \left[\frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} - \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)}\right] f(z)\, dz.$$

On a remarqué antérieurement que, dans la région $\mathcal{R}_1$ entourant C, $f(z)$ est parfaitement déterminé et n'a pas de singularité. Comparons l'intégrale précédente, prise suivant C, à la même intégrale

$$I_1 = \int_{C_1} \left[\frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} - \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)}\right] f(z)\, dz$$

prise suivant C_1.

La fonction $\frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)}$ n'a pas de pôle entre C et C_1, car son pôle est z_0. Donc

$$\int_C \frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} f(z)\, dz = \int_{C_1} \frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} f(z)\, dz.$$

Au contraire, entre C et C_1 $\frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)} f(z)$ a le pôle *simple* $z = \zeta_0$ dont le résidu sera

$$\frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)} f(\zeta_0).$$

Donc

$$I = I_1 - 2i\pi f(\zeta_0) \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)}.$$

Par conséquent,

$$f(x'_0) - f(x_0) = 2i\pi\lambda f(\zeta_0) \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)}$$
$$- \lambda \int_{C_1} f(z) \left[\frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} - \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)} \right] dz + \varphi(x'_0) - \varphi(x_0).$$

Lorsque x est voisin de ξ, en x_0 ou en x'_0, le pôle de $\frac{G(x, z)}{H(x, z)}$ est voisin de ζ, en ζ_0 ou ζ'_0. Il reste donc à distance finie du chemin C_1 si, comme on le suppose, ζ n'est ni en A ni en B.

Donc si x_0 et x'_0 tendent vers ξ,

$$\frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} - \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)}$$

tend uniformément vers zéro, quel que soit z sur C_1. Par conséquent

$$\int_{C_1} f(z) \left[\frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} - \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)} \right] dz,$$

comme $\varphi(x'_0) - \varphi(x_0)$, tend vers zéro.

On obtient donc

$$\lim [f(x'_0) - f(x_0)] = 2i\pi\lambda f(\zeta) \frac{G(\xi, \zeta)}{H'_\zeta(\xi, \zeta)}, \tag{10}$$

qui est bien le résultat obtenu par étude directe de $f(x)$.

9. Bien entendu, on ne démontre pas ainsi que $f(x_0)$ et $f(x'_0)$ tendent séparément vers des limites. Mais la méthode du n° **8** peut s'appliquer à la somme $f(x_0) + f(x'_0)$ comme à sa différence. Elle donne alors

$$f(x_0) + f(x'_0) = \varphi(x_0) + \varphi(x'_0) - \lambda \int_C [N(x'_0, z) + N(x_0, z)] f(z)\, dz.$$

Lorsque x_0 et x'_0 tendent vers ξ, les considérations du n° 8 prouvent que

$$[f(x_0)+f(x'_0)] = \varphi(x_0)+\varphi(x'_0) - 2i\pi\lambda f(\zeta_0)\frac{G(x_0,\zeta_0)}{H'_\zeta(x_0,\zeta_0)}$$
$$-\lambda\int_{C_1}[N(x'_0,z)+N(x_0,z)]f(z)\,dz.$$

Lorsque x_0 et x'_0 sont voisins de ξ, l'intégrale

$$\int_{C_1}[N(x'_0,z)+N(x_0,z)]f(z)\,dz$$

est parfaitement régulière, et tend vers

$$2\int_{C_1}N(\xi,z)f(z)\,dz$$

lorsque x_0 et x'_0 tendent vers ξ. On a donc

$$\lim[f(x_0)+f(x'_0)] = 2\varphi(\xi) - 2\pi i\lambda f(\zeta)\frac{G(\xi,\zeta)}{H'_\zeta(\xi,\zeta)} - 2\lambda\int_{C_1}N(\xi,z)f(z)\,dz.$$

Si nous appelons $f_1(x)$ la solution de l'équation de Fredholm

$$f_1(x)+\lambda\int_{C_1}N(x,z)f_1(z)\,dz = \varphi(x),$$

$f_1(x)$ admet la coupure Γ_1 correspondant à C_1 et les formules de Fredholm montrent que, lorsque x est dans la région $\mathcal{R}_1$ qui entoure CC_1, on a

$$f(x) = f_1(x).$$

Par conséquent,

$$\int_{C_1}N(\xi,z)f(z)\,dz = \int_{C_1}N(\xi,z)f_1(z)\,dz$$

et

$$\varphi(\xi)-\lambda\int_{C_1}N(\xi,z)f_1(z)\,dz = f_1(\xi).$$

Donc

$$\boxed{\lim[f(x_0)+f(x'_0)] = 2f_1(\xi) - 2\pi i\lambda f(\zeta)\frac{G(\xi,\zeta)}{H'_\zeta(\xi,\zeta)}} \tag{11}$$

Des formules (10) et (11) obtenues directement aux n°s 8 et 9 on

déduit

$$\lim f(x_0) = f_1(\xi) - 2i\pi\lambda f(\zeta)\frac{G(\xi,\zeta)}{H'_\zeta(\xi,\zeta)},$$
$$\lim f(x'_0) = f_1(\xi),$$

qui sont les formules (9) déjà obtenues par l'étude des formules de Fredholm.

10. Il serait aisé d'étendre les résultats obtenus au cas où ξ décrivant Γ, c'est une racine *double* ou *multiple* de $H(x, z) = 0$ qui décrirait la courbe C.

Le seul changement à introduire serait un nouveau calcul pour le *résidu* ρ de l'intégrale

$$\int_{C+C_1} \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)} f(z)\, dz,$$

dont l'élément admettrait dans le contour fermé $C + C_1$ un pôle double ou multiple ζ_0. Le terme

$$2\pi i\lambda f(\zeta)\frac{G(\xi,\zeta)}{H'_\zeta(\xi,\zeta)}$$

des formules précédentes serait remplacé par $2\pi i\lambda\rho$ ou plutôt par la limite de $2\pi i\lambda\rho$ quand x_0 tend vers ξ. L'essentiel du résultat précédent subsiste, à savoir que Γ est une coupure non essentielle pour $f(x)$ au delà de laquelle $f(x)$ est prolongeable analytiquement, et dans les deux sens.

L'intégration double par rapport à une courbe;

PAR W.-H. YOUNG.

1. La théorie de l'aire d'une courbe avec ses généralisations au cas de plusieurs dimensions, qui forme le sujet de ma première Communication au Congrès [1], conduit tout naturellement à la théorie de l'intégration multiple par rapport à une courbe, ou plus généralement, de *l'intégration multiple par rapport à une variété courbe*. C'est essentiellement en envisageant l'aire comme cas particulier d'une telle intégrale que nous nous sommes libéré des restrictions imposées par l'intuition géométrique. Selon celle-ci, le concept de l'aire se rapporte exclusivement au cas où la courbe ou variété fondamentale est *simple*, c'est-à-dire privée de points multiples. Cependant, l'apparence d'une telle courbe ou variété dans nos recherches ne dépend en aucune façon de la présence ou de l'absence de points multiples, et le besoin de légitimer un procédé analytique qui, dans des cas spéciaux, conduit à l'aire, existe tout aussi bien que la courbe présente de telles singularités on non. A la notion géométrique de l'aire, qui est celle d'une portion du plan délimitée par la courbe, vient s'opposer celle d'un procédé de sommation et de passage à la limite qui conduit à la propriété vectorielle de l'aire telle que nous l'avons définie.

C'est ce dernier point de vue qui fait ressortir la nature de l'aire comme cas particulier d'une classe de vecteurs liés à la courbe et possédant nettement le caractère d'intégrales doubles.

---

(1) *Congrès int. de Math. à Strasbourg* (*Comptes rendus*, PRIVAT, 1921, p. 123-129).

Le point de vue où nous nous plaçons nous affranchit de la nécessité de donner au terme *champ d'intégration* une signification géométrique [1]. L'intuition fait ici faillite, comme souvent ailleurs. Nous verrons qu'en nous servant de l'expression *champ d'intégration* dans un sens purement analytique, on arrive tout naturellement à la notion d'*intégrale double par rapport à une courbe qui possède une aire*, dans le sens où j'emploie ce dernier mot.

2. Nous supposerons tout d'abord que la fonction $f(x, y)$ à intégrer est *continue par rapport à l'ensemble* (x, y). Nous esquisserons alors une théorie complète de l'intégrale d'une telle fonction, en suivant le plan que voici :

Définir l'intégrale d'une telle fonction, en démontrer l'existence, l'exprimer au moyen d'une intégrale de Stieltjes, enfin démontrer la formule du changement de variable dans l'intégrale.

Nous passerons ensuite aux fonctions $f(x, y)$ *bornées et parfaitement générales*, puis aux fonctions *non bornées*, avec certaines restrictions indispensables à *la convergence absolue de l'intégrale*.

3. Quant à la courbe C à laquelle nous voulons lier l'intégrale double, nous commencerons par la supposer la plus élémentaire possible, soit un triangle, pour passer de là à des polygones d'une généralité de plus en plus étendue, à l'aide d'un premier principe qui s'énonce comme suit :

Si une courbe C *est la somme de deux courbes* C_1 *et* C_2, *l'intégrale de* $f(x, y)$ *par rapport à* C *est la somme des intégrales de* $f(x, y)$ *par rapport à* C_1 *et à* C_2.

L'intégrale par rapport à un triangle étant définie comme ordinaire, nous serons ainsi conduit à l'intégrale double au sens habituel tant que le polygone ne possédera pas de points multiples. Mais, dès que

---

[1] Je ne veux pas dire par là que ces résultats ne sont pas susceptibles d'une interprétation géométrique. Au contraire, on peut se représenter la courbe comme déterminant en un point quelconque de l'espace considéré un nombre caractéristique, fini ou infini, qui représente en quelque sorte la *multiplicité de l'espace* et qui, telle la tangente dans une courbe, peut devenir indéterminée.

le polygone se coupera, nous serons en présence d'une nouvelle intégrale.

4. Pour passer des polygones aux courbes proprement dites, nous nous baserons sur un principe reconnu déjà dans les temps anciens. Il est fondé sur *l'ordre linéaire des points de la courbe*.

Nous inscrivons dans la courbe C un polygone P_m dont les sommets se suivent dans l'ordre indiqué : cet ordre, nous le supposons caractérisé par un paramètre t, tel que l'écart $t_i - t_{i-1}$ de deux sommets consécutifs soit inférieur à 2^{-m}. La position des différents sommets n'entre pas en ligne de compte, seulement leur ordre linéaire sur la courbe et le fait que l'ensemble de tous les sommets, pour $m = 1, 2, \ldots$, est partout dense sur la courbe.

Le principe en question s'énonce alors :

Si une fonction $f(x, y)$ possède une intégrale double W *par rapport à la courbe* C, *l'intégrale double* V_m *de $f(x, y)$ par rapport au polygone* P_m *tend vers une limite unique et bien déterminée quand m tend vers l'infini, et cette limite coïncide avec* W.

Ce principe suggère lui-même la définition à laquelle nous parvenons maintenant. *Chaque fois que ces intégrales auxiliaires* V_m *tendent vers une limite unique et bien déterminée, indépendante du choix des sommets des* P_m, *cette limite sera prise comme définition de l'intégrale double de $f(x, y)$ par rapport à la courbe.*

On voit sans raisonner que cette définition s'accorde non seulement avec le second principe mais aussi avec le premier, et que dans tous les cas ordinaires elle coïncide avec la définition habituelle.

5. On arrive aussi sans difficulté à identifier notre intégrale double avec celle en usage dans le cas général d'une courbe divisant le plan en deux parties distinctes, pourvu que la courbe soit *semi-rectifiable*. Selon le sens donné à ce terme dans ma Communication au Congrès de Strasbourg, nous pouvons supposer que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ exprimant les coordonnées du point mobile sur la courbe sont continues et que $y(t)$ est une fonction à variation bornée.

Cette identification est une conséquence du théorème d'existence de notre intégrale. Ce théorème pourrait s'énoncer comme suit :

THÉORÈME. — *Si la courbe fondamentale* C *est semi-rectifiable, l'intégrale double existe et peut s'exprimer comme intégrale de Stieltjes le long du contour* C,

$$(1)\qquad \int\int_C f(x, y)\, dx\, dy = \int_C F(x, y)\, dy = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), y(t)]\, d\psi(t) \ldots,$$

où

$$F(x, y) = \int f(x, y)\, dx.$$

La démonstration de cette formule dans le cas d'un triangle s'appuie sur un raisonnement bien connu : on fait une redistribution des termes dans la sommation double dont l'intégrale est la limite, de façon à calculer celle-ci par une répétition du procédé d'intégration linéaire. Le premier principe nous donne ensuite la même formule dans le cas d'un polygone quelconque.

6. Dans le cas d'une courbe C semi-rectifiable, l'intégrale de Stieltjes le long de la courbe est par définition la limite d'une somme ayant pour terme général le produit d'une valeur quelconque de $F(x, y)$ sur l'arc compris entre deux sommets consécutifs du polygone par la différence des y de ces deux sommets. Ce terme diffère de l'intégrale le long de la corde d'une quantité inférieure à e fois la différence des y des deux extrémités, si m est suffisamment grand pour que $F(x, y)$ ait, dans un cercle contenant l'arc en question, une oscillation inférieure à e. Par suite de la continuité uniforme de $F(x, y)$, nous en concluons que, si m est suffisamment grand, la différence entre la somme en question et l'intégrale $\int_{P_m} F(x, y)\, dy$ ne dépasse pas e fois la variation totale de y. Il s'ensuit que l'intégrale $\int_{P_m} F(x, y)\, dy$, et par conséquent l'intégrale $\int\int_{P_m} f(x, y)\, dx\, dy$ qui lui est égale, ont pour limite unique $\int_C F(x, y)\, dy$. Cela démontre l'existence de notre intégrable double $\int\int_C f(x, y)\, dx\, dy$ et en donne en même temps la valeur $\int_C F(x, y)\, dy$.

Notre théorème d'existence (n° 5), ainsi démontré, est en particulier valable lorsque la courbe C semi-rectifiable est *simple*. Nous pouvons dans ce cas prendre pour P_m un polygone également simple, d'après un théorème démontré dans le *Cours d'Analyse* de M. de la Vallée Poussin [1]. Il s'ensuit que, définie d'après la méthode de M. Jordan, l'intégrale double par rapport à la courbe diffère d'une quantité arbitrairement petite de l'intégrale double par rapport au polygone P_m. Par conséquent, la limite de cette dernière intégrale, c'est-à-dire l'intégrale définie de la nouvelle manière, est identique à l'intégrale de M. Jordan.

7. Nous avons trouvé l'expression de notre intégrale au moyen d'une intégrale de Stieltjes; il est important, cependant, de pouvoir l'exprimer au moyen d'une intégrale double ordinaire. On y parvient moyennant une transformation continue

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v),$$

dans laquelle notre courbe C est l'image du périmètre

$$(u - a)(u - c)(v - b)(v - d) = 0$$

du rectangle fondamental $(a, b; c, d)$. La formule à obtenir est courante dans la théorie ancienne des changements de variables dans une intégrale double, soit

$$(2) \qquad \int\int_C f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^c \int_b^d f[x(u, v)\, y(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv.$$

Dans une Communication à la London Mathematical Society, à paraître sous peu, j'ai démontré la validité de cette formule de transformation sous les conditions suivantes :

1° La formule pour l'aire [2] est valable pour chaque rectangle contenu dans le rectangle fondamental $(a, b; c, d)$;

2° Quand le rectangle fondamental est divisé par des parallèles aux

---

[1] 3e édition, 1914, t. I, n° 344, p. 379.

[2] L'aire $= \int_a^c \int_b^d \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv.$

axes des u et des v, et puis subdivisé en semi-rectangles par des diagonales parallèles, les triangles du plan des (x, y) ayant pour sommets les images des sommets de ces semi-rectangles vérifient la condition que la somme des valeurs absolues de leurs aires est inférieure à une constante B, où B est indépendante du mode de division adopté.

Ces deux conditions se trouvent vérifiées, en particulier, si

$$\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| \leq L(u), \qquad \left|\frac{\partial y}{\partial u}\right| \leq L(u), \qquad \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right| \leq M(v), \qquad \left|\frac{dy}{\partial v}\right| \leq M(v),$$

où $L(u)$ et $M(v)$ sont des fonctions sommables d'une seule des variables (u, v); ou, plus généralement, si, pour un ensemble dénombrable et partout dense des u,

$$\left|\frac{\partial x(u, v)}{\partial v}\right| \leq M(v), \qquad \left|\frac{\partial y(u, v)}{\partial v}\right| \leq M(v),$$

et les variations totales de $x(u, v)$ et de $y(u, v)$ par rapport à u, pour v constante, sont bornées.

D'autre part, je prétends que les conditions (II) de ma première Communication au Congrès suffisent pour entraîner la validité de la formule de transformation. Ces conditions sont les suivantes :

a. Que $x(u, v)$, $y(u, v)$ soient des fonctions absolument continues par rapport à u et par rapport à v;

b. Que $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}$ aient ce que j'ai appelé *des sommabilités associées* [1] par rapport à (u, v);

c. De même pour $\frac{dx}{dv}, \frac{dy}{du}$.

La démonstration de ce théorème, que je présenterai à la Royal Society, suit pas à pas celle que j'ai déjà donnée pour la validité de la formule pour l'aire sous les conditions (II).

---

[1] Le cas où $x(u, v)$ et $y(u, v)$ ont des *sommabilités associées* embrasse les cas habituels, tels : 1° une des fonctions est bornée et l'autre est sommable; 2° l'une a sa $(1+p)^{\text{ième}}$ puissance et l'autre sa $\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\text{ième}}$ puissance sommable. La définition générale est celle-ci : deux fonctions $x(u, v)$ et $y(u, v)$ ont des *sommabilités associées* par rapport à (u, v) si elles sont sommables et s'il y a une fonction monotone croissante $V = V(U)$ ayant une dérivée positive,

8. Passons maintenant du cas où la fonction $f(x, y)$ à intégrer est continue au cas général d'une fonction bornée. Pour obtenir la définition de l'intégrale d'une telle fonction, nous appliquerons la méthode des suites. Nous avons là un nouvel exemple de la puissance de cette méthode si simple, et à mon avis si indispensable dans toute théorie vraiment générale d'intégration.

Soit

$$f_1(x, y), \quad f_2(x, y), \quad \ldots, \quad f_n(x, y), \quad \ldots$$

une suite monotone de fonctions bornées, pour chacune desquelles nos formules sont supposées démontrées, et soit $f(x, y)$ sa fonction limite supposée bornée. En intégrant par rapport à x, nous aurons une nouvelle suite monotone de fonctions bornées

$$F_1(x, y), \quad F_2(x, y), \quad \ldots, \quad F_n(x, y), \quad \ldots$$

dont la fonction limite

$$\lim_{n=\infty} F_n(x, y) = \lim_{n=\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx = F(x, y)$$

est également une fonction bornée.

En considérant x et y comme fonctions du paramètre t sur la courbe, nous pouvons intégrer terme à terme par rapport à $y(t)$, et nous aurons

$$\lim_{n=\infty} \int_{t_0}^{t} F_n[x(t), y(t)]\, dy(t) = \int_{t_0}^{t} F[x(t), y(t)]\, dy(t).$$

---

et telle qu'en désignant par $U = U(V)$ la fonction inverse de $V = V(U)$, les deux fonctions

$$Q(u, v) = \int_{y(\alpha, \beta)}^{y(u, v)} U(z)\, dz,$$

$$R(u, v) = \int_{x(\alpha, \beta)}^{x(u, v)} V(z)\, dz$$

sont des fonctions sommables par rapport à (u, v). Le produit de deux fonctions à sommabilités associées est une fonction sommable [*Proc. Roy. Soc.*, (A), t. LXXXVII, p. 225].

A l'aide de notre hypothèse, nous en concluons que l'intégrale

$$\int\int_C f_n(x, y)\, dx\, dy$$

a une limite unique égale à

$$\int_{t_0}^{t} F[x(t), y(t)]\, dy(t).$$

Ainsi notre définition de l'intégrale par suites monotones réussit parfaitement et nous conduit à la même intégrale de Stieltjes que dans le cas de fonctions continues, soit

$$\int\int_C f(x, y)\, dx\, dy = \int_C F[x(t), y(t)]\, dy(t).$$

D'autre part, si x et y sont envisagées comme fonctions de (u, v), notre première suite monotone de fonctions bornées peut être multipliée par la fonction sommable $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ et intégrée terme à terme par rapport à (u, v), d'où

$$\lim_{n=\infty} \int_a^c \int_b^d f_n[x(u, v), y(u, v)] \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, du\, dv$$
$$= \int_a^c \int_b^d f[x(u, v), y(u, v)] \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, du\, dv.$$

Mais, d'après notre hypothèse, l'intégrale du premier membre est égale à

$$\int_C f_n(x, y)\, dx\, dy;$$

celui-ci, d'après ce qui vient d'être démontré, a pour limite unique

$$\int_C f(x, y)\, dx\, dy.$$

La formule de transformation

$$\int\int_C f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^c \int_b^d f[x(u, v), y(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv,$$

déjà établie pour les fonctions continues, se trouve ainsi étendue tout d'abord aux fonctions l et u (*semi-continues*) et ensuite aux fonctions lu, ul, lul, ulu et à toutes les fonctions des classes suivantes, c'est-à-dire à toutes les fonctions mesurables bornées.

[*Remarquons, entre parenthèses, que le fait que $f(x, y)$ est bornée, n'entre pas dans tout ce raisonnement, sauf pour entraîner l'existence et la convergence absolue des intégrales finales.*]

Il n'est pas nécessaire, cependant, pour arriver à cette généralisation, d'appliquer la méthode des suites à toutes ces classes de fonctions séparément; c'est ce qui justifie notre définition au moyen de suites; il suffit d'étendre notre raisonnemenat ux fonctions lu et ul, pour en déduire directement que notre théorème s'applique à une fonction $f(x, y)$ bornée et mesurable générale, et cela grâce aux deux théorèmes suivants :

I. *Étant données deux fonctions bornées ne différant que sur un ensemble de mesure nulle, leurs intégrales par rapport à l'une des deux variables ne diffèrent, considérées comme fonctions de l'autre variable, que sur un ensemble de mesure nulle de valeurs de cette dernière variable.*

II. *Si les conditions imposées à la correspondance $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ entraînent la validité de la formule de transformation quand $f(x, y)$ est une fonction lu bornée, et si l'on considère dans le plan des (x, y) un ensemble S' de mesure nulle, l'image S de celui-ci dans le plan des (u, v) a cette propriété que $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ est nul presque partout.*

Dans le cas particulier où l'on a $x = u$, ou bien $y = v$, l'énoncé II se réduit à celui d'un théorème sur les fonctions d'une seule variable qui a été donné par M. de la Vallée Poussin dans son *Cours d'Analyse* [1]. De ce cas particulier on déduit facilement, à l'aide de I, le théorème :

---

[1] 3e édition, t. I, n° 268, p. 281.

Une fonction lu qui est nulle presque partout a son intégrale double par rapport à C *égale à zéro.*

La démonstration de H se ramène maintenant à un cas particulier du théorème déjà démontré sur les changements de variables : le cas où la fonction à intégrer est une *lu* bornée, nulle presque partout.

En effet, un ensemble quelconque étant la somme d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble zéro [1], nous pouvons, dans notre raisonnement, supposer que l'ensemble Q des points de S, pour lesquels on a

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = e \quad (e > 0),$$

est un ensemble zéro. L'ensemble de mesure nulle dont nous faisons ainsi abstraction n'altère pas la validité du raisonnement. L'image Q′ de Q sera également un ensemble zéro, parce que la correspondance est continue; sa mesure sera zéro, car Q′ fait partie de S′. Par conséquent, la fonction $q(x, y)$, qui a la valeur 1 aux points de Q′ et zéro ailleurs, est une *lu* bornée, nulle presque partout. On a donc

$$0 = \int\int_{Q'} q(x, y)\, dx\, dy = \int_a^c \int_b^d q[x(u, v), y(u, v)] \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, du\, dv$$
$$= \int\int_Q \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, du\, dv = m(Q)\, e.$$

Mais cela n'est possible que si la mesure $m(Q)$ de Q est nulle.

Ce raisonnement étant valable pour tout $e > 0$ et pouvant être répété pour $e < 0$, à condition de remplacer le signe $>$ par le signe $<$, nous en concluons que le déterminant fonctionnel $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ est nul presque partout dans l'ensemble S, ce qui démontre le théorème H entièrement.

9. Passons maintenant à la démonstration alternative de notre théorème sur les changements de variables pour le cas où $f(x, y)$ est

[1] S est un ensemble zéro s'il est la limite d'une série de sous-ensembles fermés $S_1, S_2, \ldots, S_n$, dont chacun est contenu dans le suivant.

une fonction bornée et mesurable parfaitement générale, en supposant démontré seulement le cas où la fonction est une *lu* bornée.

Il est bien connu qu'il existe une fonction $h(x, y)$, qui est une *lu* bornée, et une fonction $g(x, y)$, qui est une *ul* bornée, telles que

$$g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y),$$

l'égalité ayant lieu entre ces trois fonctions, sauf sur un ensemble de mesure nulle. La fonction

$$h(x, y) - g(x, y)$$

sera une *lu*, nulle presque partout, d'où immédiatement l'égalité suivante

$$\int\int_C g(x, y)\, dx\, dy = \int\int_C h(x, y)\, dx\, dy.$$

Par suite, l'intégrale de notre fonction f existe et est égale aux deux intégrales précédentes. En outre, d'après nos hypothèses,

$$\int_{t_0}^{t_1} G(x, y)\, dy(t) = \int_{t_0}^{t_1} H(x, y)\, dy(t)$$

et

$$\int_a^c \int_b^d g[x(u, v), y(u, v)] \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, du\, dv$$
$$= \int_a^c \int_b^d h[x(u, v), y(u, v)] \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, du\, dv.$$

Nous pouvons, dans la première de ces deux formules, remplacer G ou H par F, et dans la seconde nous pouvons remplacer g ou h par f, puisque nous savons que ces trois fonctions de (u, v) ne diffèrent qu'aux points d'un ensemble où $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ est nul presque partout. Donc

$$\int\int_C f(x, y)\, dx\, dy = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y)\, dy(t) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \frac{d(x, y)}{d(u, v)}.$$

Notre théorème sur les changements de variables se trouve ainsi démontré pour toute fonction $f(x, y)$ bornée.

10. Considérons finalement une fonction $f(x, y)$ mesurable non

bornée que nous prendrons en premier lieu ≥ 0. Dans quelles circonstances peut-on dire qu'elle possède une intégrale double par rapport à notre courbe?

D'après ce qui a été déjà remarqué, il n'y aura aucune difficulté pourvu que les intégrales absolument convergentes

$$F(x, y) = \int f(x, y)\, dx, \quad \int F[x(t), y(t)]\, dy(t)$$

existent; et la formule du changement de variables sera valable si

$$\int_a^c \int_b^d f(x, y) \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, du\, dv$$

existe et converge absolument.

L'existence de l'intégrale $\int\int_C f(x, y)\, dx\, dy$ est donc assurée pourvu que

$$(a) \qquad f(x, y) = 0$$

soit une fonction sommable de x et que $F[x(t), y(t)]$ *possède une intégrale par rapport à $y(t)$*, ce qui exige qu'elle possède une intégrale par rapport à la variation totale de $y(t)$. L'existence résulte également si

$$(b) \qquad f[x(u, v), y(u, v)] \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

est une fonction sommable de (u, v).

Dans le premier cas, notre intégrale double est donnée par la formule (1). Dans le second cas, elle peut être exprimée par (2); cependant, la formule (1) est aussi valable dans ce cas, si $f(x, y)$ est sommable par rapport à x.

11. Il est nécessaire d'ajouter que la condition (b) est parfaitement déterminée dans le cas où $f(x, y)$ est une fonction finie. Le symbole

$$f[x(u, v), y(u, v)] \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

représente alors une fonction maniable au point de vue de l'intégra-

tion. En effet, les conditions posées rendent le déterminant fonctionnel fini presque partout dans le plan des (u, v).

Mais dans le cas général il faut, pour que la condition (b) soit parfaitement bien déterminée, définir la valeur du symbole aux points où le symbole devient indéterminé de la forme $\infty \times 0$. Or il convient de donner au symbole la valeur zéro en tout point où le déterminant fonctionnel est nul, même si $f[x(u, v), y(u, v)]$ y prend une valeur infinie, car notre raisonnement exige que le symbole représente la limite des produits

$$f_n[x(u, v), y(u, v)]\frac{d(x, y)}{d(u, v)},$$

dans lesquelles les fonctions f_n sont bornées.

Donc si notre fonction $f(x, y)$ est sommable, ou même si elle est finie presque partout, sans être sommable, alors $f[x(u, v), y(u, v)]$, étant finie sauf sur un ensemble où $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ est nul presque partout, notre symbole sera fini presque partout et représente une fonction maniable.

12. Enfin, si $f(x, y)$ n'est pas toujours ≥ 0 (ou ≤ 0), nous exigerons que la fonction positive $|f(x, y)|$ possède une intégrale double par rapport à notre courbe. D'après ce qui précède, il suffit que

$$(a) \qquad \int |f(x, y)|\,dx$$

existe et possède une intégrale par rapport à $y(t)$.

D'autre part, la condition (b) donnée pour la validité de la formule pour la transformation des variables, évidemment nécessaire, est suffisante, que la fonction soit positive ou non. Cette condition est que

$$f[x(u, v), y(u, v)]\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

soit sommable. Sous cette condition, la fonction mesurable $f(x, y)$, *sans être soumise à aucune autre hypothèse*, possède une intégrale double par rapport à notre courbe : cette intégrale, étant la différence

des intégrales des deux fonctions positives

$$[f(x, y)]^+ \quad f(x, y)$$

[pour lesquelles la condition (b) est remplie *ipso facto*], est donnée par la formule

$$(2) \qquad \int\int_{C_1} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^c \int_b^d f[x(u, v), y(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv,$$

et, *si $f(x, y)$ est sommable par rapport à x*, elle s'exprime également au moyen de la formule

$$\int\int_C f(x, y)\, dx\, dy = \int_t^{t'} \mathrm{F}[x(t), y(t)]\, dy(t).$$

Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages;

PAR LOUIS ANTOINE.

INTRODUCTION.

Du point de vue de l'*Analysis Situs*, on ne considère pas comme distinctes deux figures F et f s'il est possible d'établir entre ces figures une correspondance ponctuelle qui soit univoque et continue dans les deux sens. On dit alors que ces figures sont homéomorphes. Mais l'identité des deux figures F et f apparaît comme plus parfaite, lorsqu'il est possible d'étendre la correspondance entre ces figures à des points qui n'en font pas partie. Dans cet ordre d'idées, en supposant que F est située dans un espace E et f dans un espace e, nous chercherons à déterminer deux nouvelles figures F_1 et f_1, situées respectivement dans E et e et ayant les propriétés suivantes :

a. F_1 contient F; f_1 contient f; F_1 et f_1 sont homéomorphes et la correspondance entre F et f est un cas particulier de la correspondance entre F_1 et f_1;

b. Tout point de F est centre d'une hypersphère de rayon non nul, dont tout l'intérieur appartient à F_1 et tout point de f est centre d'une hypersphère de rayon non nul, dont tout l'intérieur appartient à f_1.

En raison de l'invariance du nombre de dimensions d'un espace,

ce problème n'a de sens que si les espaces E et e ont le même nombre de dimensions. Trois cas sont alors possibles :

1° On peut prendre pour F_1 tout l'espace E et pour f_1 tout l'espace e. Nous dirons alors que la correspondance entre F et f s'étend à la totalité de leurs espaces;

2° On peut déterminer F_1 et f_1, mais on ne peut pas prendre pour ces figures tout E et tout e. Nous dirons que la correspondance entre F et f s'étend à leurs voisinages, mais pas à tout l'espace;

3° Il est impossible de déterminer deux figures F_1, f_1 satisfaisant aux conditions a et b ci-dessus. Nous dirons que la correspondance entre F et f ne peut s'étendre à aucun voisinage, ou encore que ces figures sont *homéomorphes seulement en elles-mêmes*.

Étant données deux figures homéomorphes situées dans des espaces ayant le même nombre de dimensions, le problème fondamental qui se pose consiste à chercher dans lequel de ces trois cas se trouvent les deux figures. L'objet de ce travail est l'étude de ce problème dans quelques cas particuliers simples. Nous nous bornerons à l'espace à deux et à l'espace à trois dimensions et aux figures formées soit de courbes de Jordan sans point multiple, soit d'ensembles parfaits partout discontinus bornés.

La première Partie est consacrée aux courbes de Jordan sans point multiple. On appelle *courbe de Jordan dans l'espace à n dimensions*, l'ensemble des points dont les n coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'expriment en fonctions continues d'un paramètre t qui prend toutes les valeurs d'un certain intervalle (α, β) (extrémités comprises), qu'on peut toujours supposer être l'intervalle $(0, 1)$. C'est ce que nous ferons dorénavant.

Une courbe de Jordan est dite *ouverte* et *sans point multiple*, ou encore est dite *un arc de Jordan* si, quels que soient t' et t'' distincts dans l'intervalle $(0, 1)$ les deux points de la courbe correspondants sont distincts. La courbe est dite *fermée* et *sans point multiple*, si les mêmes conditions sont réalisées, sauf pour le point de paramètre 0 et le point de paramètre 1 qui sont confondus.

Deux arcs de Jordan sans point multiple sont homéomorphes.

Car, pour réaliser la correspondance, il suffit d'associer les points donnés par une même valeur de t.

On définit de même la correspondance qui prouve l'homéomorphie de deux courbes de Jordan fermées sans point multiple.

Le Chapitre I étudie les courbes planes. Je démontre que deux telles courbes (toutes deux ouvertes ou toutes deux fermées) sont dans le cas 1°, c'est-à-dire que leur correspondance peut s'étendre à la totalité de leurs plans. Cette propriété a déjà été établie par plusieurs Auteurs et la correspondance a même été réalisée par représentation conforme [1]. La méthode que j'emploie a l'avantage de ne faire intervenir que des considérations tout à fait élémentaires, comme celle des chaînes qui ont été définies par M. de la Vallée Poussin et dont je rappelle les propriétés à la Section II. La considération de ces chaînes m'amène à réaliser des correspondances entre polygones plans et ce sont ces correspondances que j'étudie tout d'abord à la Section I. J'indique à la fin du Chapitre diverses applications immédiates des résultats obtenus. En particulier, je prouve que, étant données, dans un même plan, deux courbes de Jordan sans point multiple (toutes deux ouvertes ou toutes deux fermées), on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue du plan n'altérant qu'une région bornée de ce plan. Cette propriété sera fréquemment utilisée dans la suite.

Le Chapitre II est consacré aux courbes de Jordan de l'espace à trois dimensions. *Ici, chacun des trois cas prévus peut effectivement se présenter.* Si l'on considère des courbes ouvertes tracées sur un plan, une sphère ou un tore, on est toujours dans le cas 1°. Il en est de même si l'on considère des courbes fermées planes ou sphériques. Si l'on considère une courbe fermée C tracée sur un tore et une courbe c tracée sur un plan, une sphère ou un tore, on se trouve au moins dans le cas 2°, mais on n'est pas toujours dans le premier

[1] Voir les travaux de M. Carathéodory (*Math. Ann.*, Bd 72, 1912, p. 107, et Bd 73, 1913, p. 305 et 323). Au sujet de la correspondance homéomorphe entre domaines plans et des déformations homéomorphes du plan, on pourra consulter des travaux de M. Tietze (*C. R. Acad. Sc.*, t. 157, 1913, p. 500; *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, t. 38, 1914, p. 247).

cas. Si nous prenons pour c une circonférence, et que nous cherchions les conditions nécessaires et suffisantes pour que la correspondance entre C et c s'étende à tout l'espace, nous devons faire intervenir les coefficients d'enlacement α et β de C avec l'axe et le lieu des centres des méridiens du tore qui porte C. Nous trouverons alors que la condition cherchée est que l'un au moins des nombres α et β soit égal à 0 ou à 1. Quand les nombres α, β sont différents de 0 et de 1, ces deux nombres sont premiers entre eux.

Lorsque deux des courbes dont il vient d'être parlé sont dans le même espace et que leur correspondance peut s'étendre à la totalité de l'espace, on peut encore passer de l'une à l'autre par une déformation continue n'intéressant qu'une région bornée de l'espace.

De la considération des courbes tracées sur le tore, je déduis (Section IV) un arc de Jordan Γ dont la correspondance avec un segment de droite ne s'étend à aucun voisinage. Cette propriété est due à la forme de Γ au voisinage d'un point remarquable, et je montre que tout arc de Γ ayant ce point comme point intérieur (au sens strict) ne peut pas être tracé sur une surface sans point multiple; en donnant au mot *surface* le sens qu'il a ordinairement en *Analysis Situs*.

J'indique enfin à la Section V une autre singularité : *l'existence de deux courbes non enlacées et telles cependant que chacune soit coupée par toute calotte simplement connexe sans point multiple ayant l'autre pour frontière.*

Les démonstrations données dans ce Chapitre s'appuient sur quelques remarques relatives aux courbes enlacées et aux surfaces simplement connexes. Ces remarques s'étendent à un espace quelconque et je les établis à la Section I dans toute leur généralité.

Dans la deuxième Partie, j'étudie le même problème pour les ensembles parfaits partout discontinus bornés.

Le Chapitre I est une étude des propriétés générales des ensembles fermés discontinus. J'y indique un procédé permettant de définir très simplement tout ensemble de cette nature dans un espace quelconque. Il en résultera immédiatement : 1° *qu'un ensemble parfait borné, partout discontinu, est toujours situé sur un*

arc de Jordan sans point multiple; 2° *que deux tels ensembles sont homéomorphes* [1]. Le fait qu'un ensemble parfait discontinu est situé sur un arc de Jordan laisse prévoir les différences profondes qui existent entre ces ensembles, au point de vue du problème qui nous occupe, suivant qu'on les considère dans un espace à deux ou dans un espace à trois dimensions.

Dans le cas des ensembles plans (Chap. II), *la correspondance peut s'étendre à tout le plan* et peut être réalisée par des procédés analogues à ceux décrits pour le cas des courbes de Jordan.

Pour le cas de l'espace à trois dimensions (Chap. III), *je donne des exemples réalisant les trois cas possibles.* Je définis un ensemble discontinu P dont la correspondance avec un ensemble situé sur une droite ne peut s'étendre à aucun voisinage. Ce fait tient à ce que P jouit d'une propriété assez curieuse et d'allure paradoxale : *l'ensemble discontinu* P *est coupé par toute surface simplement connexe sans point multiple, qui contient, à son intérieur, des points de* P *sans les contenir tous.*

Je déduis encore de P deux ensembles discontinus P_1, P_2 dont la correspondance peut s'étendre à leurs voisinages, mais pas à tout l'espace.

Il en résulte les mêmes propriétés pour les arcs de Jordan qui contiennent ces ensembles P, P_1, P_2. Nous avons ainsi un nouvel exemple de deux arcs homéomorphes seulement en eux-mêmes et un exemple de deux arcs tels que la correspondance ne puisse s'étendre qu'à leurs voisinages et pas à tout l'espace.

Enfin, de la propriété énoncée sur P, je déduis un exemple, plus frappant encore de la singularité signalée à la fin de la première Partie : une circonférence C et un *arc* de Jordan C′ tels que toute calotte simplement connexe sans point multiple, ayant C pour frontière, coupe C′; il y a une infinité non dénombrable de points d'intersection qui sont situés sur l'ensemble discontinu P.

---

[1] Ces deux propriétés ont déjà été signalées, il y a une dizaine d'années, par M. Denjoy. Sa démonstration diffère légèrement de celle que j'indique. Cette démonstration n'a pas été publiée, mais M. Denjoy a bien voulu me la communiquer. Je tiens à l'en remercier ici.

Les singularités signalées montrent des différences très profondes entre l'espace à deux dimensions et l'espace à trois dimensions. On voit pourquoi des problèmes, très simples dans le cas de deux dimensions, deviennent tout de suite très compliqués quand on les aborde dans toute leur généralité pour l'espace à trois dimensions.

Il me reste en terminant à témoigner ma bien vive gratitude à M. Lebesgue, qui a bien voulu orienter les débuts de ce travail et qui ne m'a jamais ménagé ses précieux conseils.

PREMIÈRE PARTIE.

LES COURBES DE JORDAN.

CHAPITRE I.

LES COURBES PLANES.

I. — Correspondance entre les polygones plans.

1. Je vais démontrer élémentairement le théorème suivant :

Soient deux polygones plans P et p limités respectivement par deux contours polygonaux L et l sans point multiple et ayant le même nombre de sommets. P et p *sont homéomorphes* et la correspondance entre P et p peut être réalisée de manière que :

1° L *et* l *se correspondent côté à côté, sommet à sommet, la correspondance entre deux côtés étant une similitude ;*

2° P *et* p *peuvent être décomposés en un nombre fini de triangles se correspondant par homographie.*

Un cas particulier très simple, auquel je ramènerai le cas général, est celui où L et l n'ont que trois sommets. P et p sont alors des

triangles. Il existe une correspondance homographique (et d'ailleurs une seule) faisant correspondre ces triangles sommet à sommet, côté à côté, la correspondance entre côtés étant une similitude. Cette correspondance homographique donne la solution du problème.

2. Supposons maintenant P et p quelconques. Pour simplifier je considère un polygone convexe p' limité par un contour l' ayant autant de sommets que L et l. Si je peux établir la correspondance indiquée au n° 1 entre P (qui est quelconque) et p', elle pourra aussi s'établir entre p et p' et il en résultera la correspondance cherchée entre P et p.

Je montrerai dans un instant que si P a plus de trois côtés, on peut, en joignant deux points M_1, M_2, convenablement choisis sur L, le décomposer en deux polygones P_1, P_2 ayant chacun moins de côtés que P. La droite joignant les deux points m'_1, m'_2 de l' qui sont homologues de M_1, M_2, décomposée p' en p'_1 et p'_2.

Il suffit de réaliser la correspondance demandée pour P_1 et p_1 d'une part, pour P_2 et p'_2 d'autre part, pour que la correspondance entre P et p' en résulte.

On est ainsi ramené au cas de polygones d'un nombre moindre de côtés et, en continuant ainsi, on aboutira au cas des triangles.

3. Si P a quatre côtés au moins et s'il est convexe, on peut prendre pour M_1 et M_2 deux sommets non consécutifs de L. Si P n'est pas convexe, il a au moins un angle supérieur à deux droits, soit l'angle A. Et soient A, B, C, D, . . ., X, Y, Z, A les sommets successifs de L. La demi-droite Ax, prolongement de BA au-delà de A, rencontre P; soit N le premier des points de rencontre quand on va de A vers x. N n'appartient ni à BC, ni à ZA. S'il n'appartient pas non plus à YZ, je peux prendre M_1 en A et M_2 en N.

S'il appartient à YZ, et si le segment AY ne contient pas de points de L, je prends M_1 en A, M_2 en Y. Sinon, en faisant tourner une demi-droite, à partir de Ax, vers Y, il y aura une première position Ay telle qu'en partant de A on rencontre L avant de rencontrer YZ, soit Q le premier point rencontré par Ay à partir

de A; je puis prendre M_1 en A, et M_2 en Q, car Q est un sommet de la ligne CD ... XY.

Ceci conduit parfois à des polygones ayant des côtés consécutifs portés par une même droite, mais ces polygones ne sont nullement exclus de nos considérations. De sorte que nous aurions pu supposer que les deux lignes L et l n'avaient pas initialement le même nombre de côtés, et, en subdivisant les côtés de l'une d'elles, revenir au cas que nous avons étudié ici.

II. — Définition et propriétés des chaînons et des chaînes.

4. M. de la Vallée Poussin a introduit la notion de *chaînon* et de *chaîne* en vue d'une démonstration du théorème de M. Jordan [1]. J'utiliserai ces notions. Je vais rappeler ici les définitions et énoncer les propriétés qui me seront utiles.

Définitions. — Nous appellerons *chaînon* une région du plan d'un seul tenant, limitée par un contour polygonal extérieur unique sans point multiple, et éventuellement percée d'un certain nombre de vides limités par des contours de même nature que le premier.

Considérons un certain nombre de *chaînons consécutifs*, désignés par leurs numéros d'ordre (1), (2), ..., (n). Ces chaînons constituent *une chaîne* si deux chaînons consécutifs ont des points ou des parties communes, tandis que deux chaînons non consécutifs ne se touchent pas. Si les chaînons (1) et (n) ne se touchent pas, c'est-à-dire sont considérés comme n'étant pas consécutifs, la chaîne est dite *ouverte*, (1) et (n) sont alors les *chaînons extrêmes*. Si (1) et (n) se touchent, c'est-à-dire sont considérés comme consécutifs, la chaîne est dite *fermée*. Il n'y a plus alors de chaînons extrêmes.

Le domaine comprenant tous les points d'une chaîne ouverte (ou, en abrégé, la *chaîne*) est, comme les chaînons eux-mêmes, un

[1] De la Vallée Poussin, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. I. Chap. XIII, p. 374 et suiv.

domaine d'un seul tenant, limité par un contour polygonal extérieur unique, et percé d'un certain nombre de vides. Nous dirons, en abrégé, qu'une région du plan est intérieure à un chaînon ou à une chaîne ouverte, si elle est enfermée dans leur contour extérieur.

Une chaîne sera dite *régulière*, si un chaînon ne peut être enfermé dans un autre, ni dans un groupe de deux autres pris dans la chaîne; lesquels seraient nécessairement consécutifs.

5. Théorème I. — *Si une chaîne fermée est irrégulière, elle est intérieure à une chaîne formée de quatre au plus de ses chaînons.*

Théorème II. — *Tout vide d'une chaîne ouverte est dans l'intérieur d'un groupe de deux chaînons consécutifs.*

Théorème III. — *Le contour extérieur unique d'une chaîne régulière ouverte touche à tous les chaînons, tandis que le contour d'un vide en touche au plus quatre.*

Théorème IV. — *Dans une chaîne régulière ouverte de cinq chaînons au moins, un vide ne peut toucher en même temps aux deux chaînons extrêmes.*

Théorème V. — *Une chaîne fermée, régulière formée de cinq chaînons au moins, est constituée par un anneau intérieur à un contour polygonal* L *et extérieur à un contour polygonal* L′ *contenu dans l'intérieur du premier.*

Cet anneau peut être percé de vides. Mais ces derniers sont chacun intérieurs à un ou deux chaînons consécutifs et en touchent quatre au plus. Au contraire, les régions intérieure et extérieure à l'anneau touchent chacune, l'une par L, l'autre par L′, tous les chaînons.

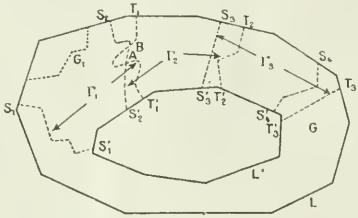
6. Complétons les théorèmes IV et V par les remarques suivantes :

Théorème. — *Sur le contour extérieur* L *d'une chaîne régulière fermée* G *formée des chaînons* $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ($n \geq 5$), *on peut marquer des points* $S_1, T_1, S_2, T_2, \ldots$ *appartenant respectivement à*

G_1, G_2, ... *se succédant dans l'ordre* S_1, T_n, S_2, T_1, S_3, T_2, ..., S_n, T_{n-1}, S_1 *et tels que tous les points de* G_i *qui sont sur* L *appartiennent à la portion* $S_i T_{i-1} S_{i-1} T_i$ *de* L. *Sur le contour intérieur* L', *on peut trouver des points analogues* S'_1, T'_1, ... : *il y a accord entre les sens* $S_1 T_n S_2$ *de* L *et* $S'_1 T'_n S'_2$ *de* L'.

Décrivons le contour extérieur de G_1. Nous trouverons au moins une portion allant de L à L' et une allant de L' à L. Soient S_1 S'_1

Fig. 1.



et T_1 T'_1 ces deux parties. Elles ne se coupent pas ; elles divisent la chaîne en deux morceaux, dont l'un, que j'appelle Γ_1, est du même côté que G_1 par rapport à S_1 S'_1. Il est limité par S_1 S'_1, un arc $S'_1 T'_1$ de L', T'_1 T_1 et un arc T_1 S_1 de L.

G_1 *est tout entier dans* Γ_1, puisqu'il a des points dans Γ_1 et qu'il ne traverse pas le contour de Γ_1. A l'intérieur de Γ_1, la frontière de G_1 ne contient aucune autre partie joignant L et L', puisqu'une telle ligne ne pourrait être traversée par G_1 et cependant partagerait Γ_1 en deux parties contenant toutes deux des points de G_1. La frontière de G_1 se compose donc, outre S_1 S'_1 et T_1 T'_1, de deux parties, l'une joignant S_1 à T_1, l'autre joignant T_1 à S_1 : la première ne contient aucun point de L, la seconde ne contient aucun point de L'. Les portions de Γ_1 qui n'appartiennent pas à G_1 n'ont donc jamais à la fois comme frontière des parties de L et des parties de L'.

Il en résulte *que* G_2, G_3, ..., G_{n-1} *n'ont aucun point dans* Γ_1 puisque, ne contenant aucun point de G_1, ils devraient se trouver dans ces parties de Γ_1 qui ne touchent pas à la fois L et L'. Ni G_2, ni G_n n'est complètement intérieur à Γ_1, car il y a par exemple des

points de G_2 appartenant à G_3. Les deux régions Γ_2 et Γ_n, construites comme Γ_1, ne sont donc pas intérieures à Γ_1.

Supposons que T'_1, qui appartient à G_2 ou à G_n appartienne à G_2. Sinon, on devrait appeler ce point S'_1 et raisonner sur G_n comme nous allons le faire sur G_2. Décrivons $T'_1 T_1$. Nous resterons dans G_2 tant que nous ne rencontrerons pas une frontière de G. Supposons que nous arrivions en A à la frontière γ d'un vide de G. Ce vide touche au plus à quatre chaînons consécutifs de G (n° 3, V) et comme A appartient à G_1 et à G_2, γ appartient au plus à quatre chaînons consécutifs de la suite $G_{n-1}, G_n, G_1, G_2, G_3, G_4$. Décrivons γ à partir de A dans le sens qui nous fait quitter $T'_1 T_1$ jusqu'à ce que nous revenions en B sur $T'_1 T_1$ et soit γ' l'arc ainsi décrit. γ' ne contient aucun point de G_1 (sauf ses extrémités A et B). La portion de γ' voisine de A appartenant comme A à G_2, tout γ' appartient exclusivement à G_2, G_3, G_4. Mais B appartient à G_1, donc ne peut appartenir à G_3, ni à G_4. Donc la partie de γ' voisine de B appartient à G_2, donc aussi B. En continuant à décrire $T'_1 T_1$ à partir de B, on arrive finalement en T_1 sur G_2.

De même, S_1 et S'_1 appartiennent tous deux soit à G_2, soit à G_n. Je dis qu'ils appartiennent à G_n. Supposons le contraire et considérons la région Γ_2; soient S_2, T_2 les extrémités de l'arc découpé par Γ_2 dans L. S_1 et T_1 appartenant à Γ_2, l'un des deux arcs $S_1 T_1$ de L appartient tout entier à Γ_2. Ce ne peut être l'arc extérieur à Γ_1, car tout point de L appartenant soit à Γ_1, soit à Γ_2, G_4, qui n'a aucun point dans Γ_1 et Γ_2, ne toucherait pas L. Ce ne peut être l'arc $S_1 T_1$ de Γ_1. Car les deux points S_2, T_2 seraient extérieurs à Γ_1 et, par suite, appartiendraient à G_3 et l'un des deux arcs $S_2 T_2$ de L appartiendrait à Γ_3. Ce ne peut pas être l'arc de Γ_2, puisqu'il contient des points de G_1. Ce ne peut pas être non plus l'autre arc $S_2 T_2$ de L, car tout point de L appartiendrait alors soit à Γ_2, soit à Γ_1, et G_n ne toucherait pas L. Il y a donc contradiction et par suite S_1, S'_1 appartiennent à G_n.

Ainsi, si l'on parcourt L et L' dans le même sens, on rencontre d'une part S_1, T_n, S_2, T_1 dans cet ordre, et d'autre part S_1, T_n, S'_2, T_1 dans le même ordre, ce qui justifie l'énoncé. Remarquons que S_1 et T_n peuvent être confondus, ainsi que S_2 et T_1.

Pour la suite, remarquons encore que la couronne limitée par L et L′ se trouve divisée en des morceaux $\Gamma_1, \Gamma'_2, \Gamma_3, \Gamma'_4, \ldots$ par les lignes $S_1 S'_1$; $T_1 T'_1$; $S_3 S'_3$; $T_3 T'_3$; $S_5 S'_5, \ldots$.

Soient P et Q deux points de L (ou de L′). Soient p et q les rangs des chaînons qui contiennent P et Q. La discussion précédente montre que l'un *des deux arcs* PQ *de* L *n'emprunte de points qu'aux chaînons numérotés* $p-1, p, p+1, p+2, \ldots, q-2, q-1, q, q+1$ *et l'autre arc aux chaînons* $q-1, q, q+1, q+2, \ldots, p-2, p-1, p, p+1$ (dans ces suites, le nombre 1 doit être considéré comme consécutif de n).

Le cas d'une chaîne ouverte se ramène immédiatement à celui qui vient d'être traité. Il suffit d'ajouter un chaînon tout entier extérieur à la chaîne sauf deux portions de son bord, dont l'une appartiendrait au bord du premier chaînon (et à ce chaînon seulement) et l'autre au bord du $n^{\text{ième}}$ chaînon. On aurait des dispositions analogues avec cette différence qu'il faut considérer les chaînons comme se suivant dans l'ordre

$$1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1, 2 \ldots$$

au lieu de l'ordre

$$1, 2, 3, \ldots, n-1, n, 1, 2, \ldots.$$

III. Correspondance entre les plans de deux courbes fermées.

7. Soient, dans les plans E et e, deux courbes de Jordan fermées sans point multiple C et c, dont les coordonnées sont des fonctions continues d'un paramètre t variant dans l'intervalle $(0, 1)$. En associant les points de C et c donnés par une même valeur de t, je réalise l'homéomorphie de ces courbes. *Je me propose d'étendre cette correspondance à la totalité des plans* E *et* e. Il suffit, d'après une remarque déjà utilisée, de prendre pour c une courbe particulière. *Je prendrai pour* c *le contour d'un carré* de centre, l'origine, de côtés parallèles aux axes de coordonnées et de périmètre égal à 1. Le paramètre t d'un point de c sera son abscisse curviligne comptée à partir d'un certain sommet de c.

La méthode que j'emploie est la suivante : J'enferme C dans une suite de chaînes régulières fermées G_0, G_1, G_2, ..., G_n, ... telles que la chaîne G_n soit totalement intérieure à la chaîne G_{n-1}. Les contours polygonaux L_{n-1}, L'_{n-1}, L_n, L'_n qui limitent ces chaînes déterminent deux couronnes A_{n-1}, A_{n-1} et G_{n-1} est la somme de ces deux couronnes et de G_n. Je décompose chacune de ces couronnes en polygones en nombre égal à celui des chaînons de G_{n-1}. Je fais des constructions analogues pour c. J'établis ensuite entre les polygones obtenus la correspondance indiquée au n° 1. J'établis des correspondances analogues entre les extérieurs de L_0 et l_0 et les intérieurs de L'_0 et l'_0. Moyennant quelques précautions, ces correspondances réalisent la correspondance cherchée entre E et e.

Dans l'exposition de cette méthode, j'énoncerai quelques résultats déjà établis par M. de la Vallée Poussin; mais j'emploierai des procédés différant des siens et appropriés au but que je poursuis.

8. Théorème. — *Étant donnés une courbe fermée* C *sans point multiple et un nombre positif* Δ_0, *je puis enfermer* C *dans une chaîne régulière fermée* G_0 *d'au moins cinq chaînons et dont chacun a un diamètre inférieur à* Δ_0.

Partageons l'intervalle (0, 1) de variation de t en 2^k parties égales. Ceci partage C en 2^k tronçons. Soit ε_0 le maximum du diamètre de ces tronçons. Couvrons d'autre part le plan d'un pavage constitué par des carrés égaux de côtés parallèles aux axes et soit η_0 un nombre supérieur au diamètre (diagonale) de ces carrés. A chaque tronçon j'attache un chaînon formé de ceux des carrés du pavage qui touchent ce tronçon. Il s'agit de choisir k et η_0 de façon à satisfaire aux conditions imposées.

Deux chaînons consécutifs se touchent; car ils ont en commun le carré qui contient le point commun aux deux tronçons dont ils proviennent. Pour que deux chaînons non consécutifs ne se touchent pas, il suffira de prendre η_0 inférieur à la moitié de l'écart minimum de deux tronçons non consécutifs. Remarquons qu'alors η_0 est inférieur à la moitié de l'écart des extrémités d'un même tronçon, donc à $\frac{1}{2}\varepsilon_0$. D'autre part, le diamètre d'un chaînon

est au plus égal à celui du tronçon augmenté de $2\eta_0$: il est donc inférieur à $2\varepsilon_0$.

La *chaîne sera régulière si* (n° 5, I) elle n'est pas intérieure à un groupe de quatre chaînons consécutifs. Ce groupe a un diamètre inférieur à $8\varepsilon_0$. Comme C appartient à la chaîne, il suffira que ε_0 soit inférieur au huitième du diamètre de C.

Il suffira donc de prendre $k > 2$ (pour avoir au moins cinq chaînons) *et assez grand pour que* ε_0 *soit inférieur au huitième du diamètre de* C *et à la moitié de* Δ_0. Ceci fait, la courbe est partagée en tronçons et l'on *prendra* η_0 *inférieur à la moitié de l'écart de deux tronçons non consécutifs.* Tout ceci est possible puisque ε_0 tend vers o quand k augmente indéfiniment.

C est intérieure à cette chaîne G_0 et ne touche pas à ses deux bords L_0, L'_0 ; car tout point de C est intérieur à un carré ou à un groupe de deux ou quatre carrés du pavage.

Si l'on ne fixe pas Δ_0, on pourra déterminer la chaîne par les autres conditions et l'on sera assuré que chaque chaînon a un diamètre $< 2\varepsilon_0$.

9. Supposons que G_{n-1} ait été construite à l'aide d'un certain partage de C en tronçons et d'un certain pavage du plan par des carrés. Pour construire G_n je partage l'intervalle qui donne chaque tronçon du partage précédent en deux parties égales. Soit ε_n le maximum du diamètre des tronçons obtenus. Chaque tronçon ainsi obtenu étant une fraction de l'un des précédents, ε_n *ne peut pas augmenter et tend vers* o *quand* n *augmente indéfiniment.* Soit η_n un nombre inférieur : 1° à la moitié de l'écart de deux tronçons non consécutifs; 2° à l'écart de C avec chacun des contours polygonaux L_{n-1}, L'_{n-1} qui limitent G_{n-1}. Je partage chaque carré du pavage qui a donné G_{n-1} en un nombre (le même pour tous) assez grand de carrés égaux pour que ces carrés aient un diamètre inférieur à η_n. Ce partage en tronçons et ce pavage permettent de définir la chaîne G_n. Elle remplira les conditions voulues, car le diamètre du carré du pavage remplit les conditions imposées vis-à-vis de ε_n et comme ε_n n'est pas supérieur à ε_0, il vérifie les mêmes inégalités de condition que ε_0. De plus, la deuxième condition im-

posée à γ_{in} montre que cette chaîne n'a pas de points sur L_{n+1}, ni L'_{n+1}, donc est bien intérieure à G_{n+1}.

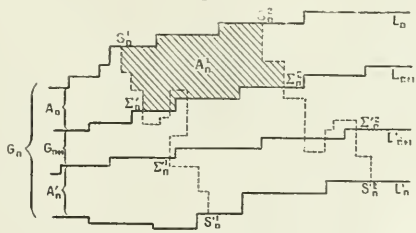
Remarquons enfin que le diamètre maximum Δ_n *des chaînons de* G_n *est inférieur à* $2\varepsilon_n$ et que *chacun des deux chaînons de* G_n, *qui proviennent d'un tronçon ayant servi à la formation de* G_{n-1}, *est une partie du chaînon correspondant de* G_{n-1} en raison de la construction des pavages.

Les chaînes ainsi construites définissent bien les anneaux A_n, A'_n annoncés au n° **7**. A_n est compris entre L_n et L_{n+1} et A'_n entre L_n et L'_{n+1}.

10. *Décomposition des anneaux* A_n, A'_n *en polygones.* — Dans ce qui suit, j'aurai à considérer des éléments de même nature, en nombre égal à ceux des chaînons de chaque chaîne G_n. Je désignerai tous ces éléments par une même lettre affectée de deux indices : un indice inférieur, celui de la chaîne G_n ; un indice supérieur qui sera le numéro d'ordre du chaînon de G_n auquel correspond l'élément.

Proposons-nous de décomposer en polygones les deux anneaux A_n, A'_n déterminés par les deux chaînes G_n, G'_{n+1} et limités respectivement par les contours L_n, L_{n+1} et L'_n, L'_{n+1} (*fig.* 2). Pour cela, divisons la couronne L_n, L'_n en morceaux Γ_{2p+1} et Γ'_{2p} par des lignes S_{2p+1} S'_{2p+1}, T_{2p+1} T'_{2p+1}, comme il a été dit au n° **6**. Pour sim-

Fig. 2.



plifier les notations, les morceaux seront notés Γ^1_n, Γ^2_n, ..., et les lignes S^1_n, S'^1_n, S^2_n S'_n, ...

Considérons une des lignes SS' ainsi construites. S est extérieur à L_{n+1} et à L'_{n+1}, tandis que S' est intérieur à ces contours. Donc SS'

coupe chacun de ces contours. Parcourons SS′ de S vers S′. *J'appellerai* Σ *le premier point de rencontre avec* L_{n-1} *et* Σ' *le dernier point de rencontre avec* L_{n+1}. Les lettres Σ, Σ' seront naturellement affectées des mêmes indices que les lettres S, S′. Nous ne conserverons de chaque ligne SS′ que les arcs $S\Sigma$ et $S'\Sigma'$. Ces lignes ne se coupent pas. Elles partagent donc les anneaux A_n et A'_n en polygones que je désignerai par la lettre A avec deux indices évidents et un accent s'il s'agit de A'_n. Par exemple, A'_n aura parmi ses sommets les points S'_n, S^2_n, Σ'_n, Σ^2_n.

Ces polygones A et A′ réalisent la décomposition des anneaux A_n, A'_n en polygones : ils se présentent comme des chaînons ne se touchant que par des parties de leurs frontières, la chaîne qu'ils forment n'ayant pas de vides.

11. Faisons une remarque qui nous sera utile plus loin, sur la disposition des polygones A par rapport aux chaînons G. Considérons le polygone A^α_n et étudions son contour. La définition de ce contour dépendant de la parité de α, nous distinguerons deux cas.

1° α *impair*. — Le contour $\Sigma^\alpha_n S^2_n S^{\alpha+1}_n \Sigma^{\alpha+1}_n$ appartient aux contours des trois chaînons $\alpha - 1$, α, $\alpha + 1$ (n° **6**). Il est donc intérieur à l'ensemble de ces trois chaînons. Les points Σ^α_n, $\Sigma^{\alpha+1}_n$ appartiennent au chaînon G^α_n donc ne peuvent appartenir qu'à ces trois mêmes chaînons. Il en résulte que ces points ne peuvent appartenir qu'aux chaînons $2\alpha - 3$, $2\alpha - 2$, ..., $2\alpha + 2$ de G_{n+1}, sans quoi ils appartiendraient à d'autres chaînons de G_n (n° **9**). Donc le contour $\Sigma^\alpha_n \Sigma^{\alpha-1}_n$ ne peut emprunter que les chaînons $2\alpha - 4$, ..., $2\alpha + 3$ de G_{n+1} (n° **6**), et par suite appartient aux chaînons $\alpha - 2$, $\alpha - 1$, α, $\alpha + 1$, $\alpha + 2$ de G_n. Tout le contour de A^α_n et par suite tout ce polygone est intérieur au groupe de ces cinq chaînons de G_n.

2° α *pair*. — Rien n'est changé pour la première partie du contour. Σ^α_n appartient au chaînon $\alpha - 1$, donc peut appartenir à l'un des trois chaînons $\alpha - 2$, $\alpha - 1$, α. De même $\Sigma^{\alpha-1}_n$ peut appartenir à l'un des trois chaînons α, $\alpha + 1$, $\alpha + 2$ et pas à d'autres. Le même raisonnement montre que tout l'arc $\Sigma^\alpha_n \Sigma^{\alpha-1}_n$ appartient au groupe des sept chaînons $\alpha - 3$, ..., $\alpha + 3$ de G_n.

Donc, dans tous les cas, A_n^α *est intérieur à un groupe de sept chaînons consécutifs de* G_n dont le chaînon moyen est le chaînon G_n^α. Par suite, A_n^α *ne peut toucher qu'à neuf chaînons consécutifs de* G_n, G_n^α étant toujours le chaînon moyen.

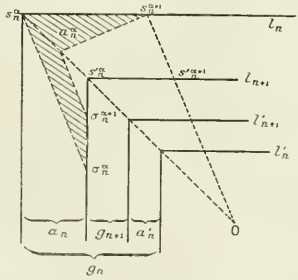
Il en résulte aussi qu'*un chaînon de* G_n *ne peut toucher au plus que neuf polygones consécutifs de* A_n.

Les résultats sont évidemment les mêmes pour A'_n.

12. Passons à la courbe c du plan e: c est le périmètre d'un carré de côtés parallèles aux axes, de centre l'origine o des coordonnées et c a pour longueur 1. Le paramètre t d'un point de c est son abscisse curviligne comptée à partir d'un sommet.

Pour construire une chaîne g_0 contenant c, je considère d'abord

Fig. 3.



deux contours carrés homothétiques à c et concentriques, l'un l_0 extérieur, l'autre l'_0 intérieur. Puis je partage c en 2^k tronçons égaux et je mène les demi-droites allant de o aux extrémités de ces tronçons (les sommets de c sont parmi ces points). Les quadrilatères formés par ces droites et l_0 l'_0 seront les chaînons de la chaîne g_0, leurs sommets seront désignés sur l_0 par s_0^α et sur l'_0 par s'^α_0 et le chaînon g_0^α sera le quadrilatère $s_0^\alpha\, s_0^{\alpha+1}\, s'^{\alpha+1}_0\, s'^\alpha_0$.

D'une manière générale, supposons g_{n-1} définie et limitée par deux carrés l_{n-1}, l'_{n-1}. Pour définir g_n je construis deux carrés l_n, l'_n homothétiques à c et concentriques et respectivement équidistants de l_{n-1} et c et l'_{n-1} et c. Je partage en deux tronçons égaux

chacun des tronçons qui a servi à construire g_{n-1} et je joins o aux extrémités. Ceci me donne les chaînons de g_n dont je désignerai les sommets par la lettre s ou s' affectée de l'indice inférieur n et d'un indice supérieur dont la détermination est immédiate. Le chaînon g_n^α aura pour frontière le contour $s_n^\alpha s_n^{\alpha+1} s_n'^{\alpha+1} s_n'^{\alpha}$.

J'appelle a_n, a_n' les anneaux respectivement compris entre l_n, l_{n+1} et l_n', l_{n+1}'.

Revenons au plan E. Soit Σ_n^α un point Σ sur L_{n+1}. Si ce point est confondu avec un point S_{n+1}, soit S_{n+1}^k, je noterai aussi le point s_{n+1}^k par la lettre σ_n^α. Si Σ_n^α est situé entre deux points consécutifs S_{n+1} d'indices supérieurs k, $k+1$, je marquerai sur l_{n+1}, entre les deux points s_{n+1} d'indices k, $k+1$, un point que j'appellerai σ_n^α. *Remarquons que si les points* S_{n+1}, Σ_n *se présentent sur* L_{n+1} *dans un certain ordre, les points* s_{n+1}, σ_n *se présenteront sur* l_{n+1} *dans le même ordre.*

Or, puisqu'on peut joindre les points S_n, Σ_n dans l'anneau A_n sans que les chemins se coupent, on pourra joindre les points s_n, σ_n dans a_n par des chemins ne se coupant pas, ceci parce que les ordres de succession des points de même indice sont les mêmes dans E et e. Comme chemin $s_n^\alpha \sigma_n^\alpha$, je prendrai, quand ce sera possible, *le segment rectiligne* ayant ces points pour extrémités et, dans le cas contraire, *une ligne brisée ayant ses sommets uniquement sur les diagonales de* e. a_n se trouve ainsi décomposé en polygones et j'appelle a_n^α celui de ces polygones qui contient les points s_n^α, σ_n^α, $s_n^{\alpha+1}$, $\sigma_n^{\alpha+1}$.

Je ferai les mêmes constructions sur les anneaux a_n (*fig.* 3).

Nous avons vu que l'arc $\Sigma_n^\alpha \Sigma_n^{\alpha+1}$ de L_{n+1} ne contient que des points appartenant aux seuls chaînons de $2\alpha - 6$ à $2\alpha + 5$ de G_{n+1}.

Donc cet arc est compris entre les deux points S_{n+1} d'indices supérieurs $2\alpha - 7$, $2\alpha + 6$. L'arc $\sigma_n^\alpha \sigma_n^{\alpha+1}$ de l_{n+1} est donc compris lui aussi entre les points s_n ayant ces indices, c'est-à-dire qu'il est intérieur aux chaînons de g_n, $\alpha - 3, \ldots, \alpha + 3$. Donc :

Un polygone a_n^α *est intérieur à un groupe de sept chaînons consécutifs de* g_n *et en touche au plus neuf*, le chaînon moyen étant g_n^α. *De même un chaînon* g_n^α *touche au plus neuf polygones consécutifs de* a_n.

13. Considérons une ligne polygonale $\Sigma_n^\alpha S_n^\alpha$ et la ligne $\sigma_n^\alpha s_n^\alpha$. Si ces lignes n'ont pas, initialement, le même nombre de sommets, je marque sur l'une d'elles des points qui joueront le rôle de sommets. J'établis ensuite entre ces lignes une correspondance continue, faisant correspondre les sommets, et faisant correspondre les côtés par similitude. Les points S_{n-1}, Σ_n partagent L_{n-1} en tronçons. Je fais de même pour chacun de ces tronçons et pour le tronçon correspondant de l_{n+1}. La correspondance entre les contours de A_n^α et a_n^α est alors celle indiquée au n° **1** et par suite je peux étendre cette correspondance à la totalité de ces polygones comme il a été dit à ce numéro. Il en est de même pour l'intérieur de L_0 et l'intérieur de l_0.

Pour les extérieurs de L_0 et l_0 je considère deux contours carrés auxiliaire L, l égaux et assez grands pour contenir respectivement à leur intérieur tout L_0 ou tout l_0. Je joins un sommet de L à un sommet de L_0 et un sommet de l au sommet correspondant sur l_0 à l'aide de lignes polygonales ayant le même nombre de sommets. La couronne comprise entre l et l_0 et celle comprise entre L et L_0 se présentent alors comme deux polygones auxquels j'applique les considérations du n° **1**. Enfin, pour les extérieurs de L et l, j'envisage deux axes de coordonnées portés par deux côtés de L et les deux axes portés par les côtés correspondants de l. Je fais correspondre les points qui ont même coordonnée.

La correspondance sur C et c a été définie. Elle lie les points qui ont même paramètre. Elle fait correspondre en particulier les points M_n^α, m_n^α; M_n^α étant le point commun aux deux tronçons qui ont fourni les chaînons $\alpha - 1$, α de G_n et m_n^α étant commun aux deux tronçons qui ont fourni les chaînons $\alpha - 1$, α de g_n. Ces points ont en effet pour paramètre $\frac{\alpha - 1}{2^{k-n}}$.

14. *Je dis que la correspondance ainsi établie donne la solution du problème posé.* Pour le montrer il me faut d'abord prouver qu'elle atteint tout point de E et tout point de e et qu'elle est biunivoque. Il est manifeste que tout point de e est atteint. Cela est manifeste aussi pour tout point de E qui appartient à C ou qui est extérieur

à une chaîne G_n, car un tel point appartient à un des anneaux A, ou est extérieur à L_0, ou intérieur à L_0'. Il suffit donc de prouver que tout point M de E non situé sur C est extérieur à une des chaînes G_n. Ceci résulte du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit Δ_n le maximum du diamètre des chaînons de G_n. Tout point intérieur à G_n a, avec C, un écart inférieur à Δ_n.*

Tout point intérieur à G_n appartient soit à un chaînon, soit à un vide intérieur à un groupe de deux chaînons consécutifs (n° 5, V). Si M appartient à un chaînon, le théorème est vérifié, car ce chaînon contient au moins un point de C, et la distance de ce point à M est inférieure au diamètre du chaînon. Si M appartient à un vide, appelons λ le contour de l'ensemble des deux chaînons qui contiennent ce vide et N le point de C commun aux deux tronçons qui ont donné naissance à ces chaînons. N étant intérieur aux deux chaînons, est intérieur à λ. M étant aussi intérieur à λ une demi-droite issue de M et opposée à MN coupe λ en un point P. P est sur un des deux chaînons et ce chaînon contient aussi N qui appartient aux deux. Donc $NP < \Delta_n$ et par suite $MN < \Delta_n$ puisque M est par construction entre N et P. Le théorème est démontré.

Soit alors M un point de E non sur C. Il a avec C un écart non nul ε. Considérons un nombre n assez grand pour que le maximum ε_n du diamètre des troncons de C qui fournissent les chaînons de G_n soient inférieurs à $\frac{1}{2}\varepsilon$. Δ_n est inférieur à $2\varepsilon_n$, donc à ε. M ayant avec C un écart supérieur à Δ_n est extérieur à G_n.

La correspondance s'étend donc bien à la totalité de E et e. Elle est biunivoque, car les polygones A (ou a) n'ont en commun que des points frontières et que ces frontières se correspondent.

15. *Il reste enfin à prouver que cette correspondance est continue dans les deux sens.* Elle est manifestement continue en tout couple de points homologues M, m qui n'appartiennent pas à C et c. Il suffit alors de faire la démonstration en supposant M et m sur C et c.

Un point M de C est intérieur au contour extérieur de l'un au

moins des chaînons de la chaîne G_i: soit par exemple, au chaînon G_i^7. Tous les points de G_i^7 *suffisamment voisins de* M ont leurs homologues définis par la considération de polygones A_{i+p}^k, où p est positif. Chacun de ces A_{i+p}^k contenant des points de G_i^7 contient au plus des points de 7 chaînons consécutifs de la chaîne G_{i+p}, dont l'un au moins provenant de la subdivision de G_i^7: donc ces 7 chaînons sont intérieurs à 7 chaînons consécutifs de G_i, l'un d'eux étant G_i^7. Finalement, tous les A_{i+p}^k considérés appartiennent aux 13 premiers chaînons de G_i^1 à G_i^{13} de la chaîne G_i. Les a_{i-p}^k correspondant font donc partie de la figure formée par les 13 chaînons g_i^1 à g_i^{13} et le diamètre de cette figure tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

Ceci prouve la continuité de la correspondance quand on passe de E à e. Le passage de e à E s'étudiera de même: d'ailleurs, d'après un résultat de M. Jordan, une correspondance biunivoque et continue dans un sens est continue dans les deux sens.

16. En résumé, le problème posé au n° **7** se trouve résolu. Si nous envisageons deux courbes fermées quelconques sans point multiple, étant donnée une correspondance biunivoque et continue entre les points de ces courbes, on peut l'étendre à la totalité de leurs plans au moyen d'une infinité dénombrable de correspondances homographiques. La correspondance entre régions homologues ne contenant pas de points des courbes est obtenue par un nombre fini de telles correspondances.

IV. — Correspondance entre les plans de deux courbes ouvertes.

17. *Étant données deux courbes de Jordan ouvertes* C *et* c *sans point multiple des plans* E *et* e, *nous allons étendre à tout* E *et* e *la correspondance entre* C *et* c.

Pour cela, appelant A, B; a, b les extrémités de C et c, je vais construire un arc C′ sans point multiple joignant A à B et n'ayant que ces points en commun avec C et un arc analogue c'. Je ferais

correspondre $C + C'$ avec $c + c'$ en conservant la correspondance donnée de C avec c. La correspondance entre ces courbes fermées s'étend à la totalité de leurs plans et cette extension résout le problème posé pour C et c.

Comme courbe c, je prends le segment $(0, 1)$ de Ox et pour c' je prends le reste $ap_0 q_0 b$ du périmètre d'un carré de côté c. La construction de C' va encore résulter des propriétés des chaînes régulières ouvertes enfermant C. Ce sont ces propriétés que j'étudie maintenant.

18. Théorème. *Soit* C *un arc de Jordan sans point multiple d'extrémités* A, B. *Je peux enfermer* C *dans une chaîne régulière ouverte* G_0 *d'au moins sept chaînons, et dont chacun a un diamètre inférieur à un nombre* Δ_0 *donné.*

Partageons l'intervalle $(0, 1)$ en 2^k parties égales, ce qui partage C en un même nombre de tronçons. Appelons ε_0 le maximum du diamètre de ces tronçons. Considérons d'autre part un pavage du plan à l'aide de carrés égaux ayant un diamètre inférieur à un certain nombre η_0 que je déterminerai ensuite. Pour constituer le premier chaînon, je prends un arc AA_0 de C somme des α_0 premiers tronçons et je garde ceux des carrés qui touchent cet arc. Ils forment un chaînon que j'appelle (A_0). Je construis de même le chaînon (B_0) à l'aide de l'arc BB_0 somme des β_0 derniers tronçons. Je constitue les chaînons intermédiaires chacun à l'aide d'un des tronçons restants de C.

Les chaînons ainsi construits forment une *chaîne ouverte* si η_0 est inférieur à la moitié de l'écart de deux tronçons non consécutifs. On a alors $\eta_0 < \frac{1}{2}\varepsilon_0$ (n° **8**).

La chaîne sera *régulière* (n° **4**) si aucun chaînon n'est intérieur à aucun groupe de deux chaînons consécutifs. Pour écarter le cas contraire, je distinguerai deux cas suivant que le groupe en question ne contient pas ou contient un des chaînons extrêmes.

Premier cas. — Supposons que le chaînon de rang λ soit intérieur au groupe des deux chaînons intermédiaires λ, $\lambda + 1$. Sup-

posons pour fixer les idées $\varkappa < \lambda$. Le chaînon $\varkappa + 1$ ne touche aucun des chaînons λ, $\lambda + 1$ qui ne lui sont pas consécutifs. Il a des points à l'intérieur de leur groupe, ceux qu'il a en commun avec $(\varkappa)$. Il est donc tout entier intérieur à ce groupe. Il en est de même des chaînons $\varkappa + 2$, $\varkappa + 3$, ... (A_0). Dans ce cas, l'un des chaînons extrêmes est intérieur à un groupe de deux chaînons intermédiaires consécutifs. Ce cas ne pourra pas se produire si chaque chaînon extrême a un diamètre supérieur au double du maximum du diamètre des chaînons intermédiaires, c'est-à-dire supérieur à $4\varepsilon_0$, puisque chaque chaînon intermédiaire a au plus le diamètre $2\varepsilon_0$ (n° **8**). Pour réaliser cette condition nous prendrons α_0 et β_0 juste assez grands pour que les diamètres des arcs AA_0, BB_0 surpassent $4\varepsilon_0$. On peut alors préciser les limites entre lesquelles sont compris les diamètres de (A_0) et (B_0). Si l'on diminuait α_0 d'une unité, on aurait un tronçon de diamètre au plus égal à $4\varepsilon_0$; donc AA_0 a un diamètre au plus égal à $5\varepsilon_0$ et par suite (A_0) a un diamètre inférieur à $6\varepsilon_0$. Il en est de même pour (B_0).

Deuxième cas. — Le chaînon $(\varkappa)$ est intérieur au groupe formé de (A_0) et de son consécutif [le raisonnement serait le même pour (B_0)]. Le chaînon $(\varkappa + 1)$ serait aussi intérieur à ce groupe et par suite le chaînon (B_0). Or B est intérieur à (B_0). B serait donc intérieur au groupe en question qui contient aussi A. Ce groupe a un diamètre au plus égal à $6\varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 = 8\varepsilon_0$. Si l'on appelle D la distance AB, ce cas ne se produira pas si $\varepsilon < \frac{1}{8}D$.

Enfin écrivons qu'il y a au moins sept chaînons [1], c'est-à-dire au moins cinq chaînons intermédiaires. Les arcs AA_0, BB_0 ont chacun un diamètre inférieur à $5\varepsilon_0$. Si donc $D > 10\varepsilon_0$, les arcs AA_0, BB_0 n'empiètent pas et l'arc A_0B_0 a un diamètre supérieur à $D - 10\varepsilon_0$. Il suffit alors que $D - 10\varepsilon_0 > 5\varepsilon_0$ ou $15\varepsilon_0 < D$ pour être assuré que cet arc comprend au moins cinq tronçons. Cette condition est plus restrictive que celle trouvée plus haut.

Si enfin on veut que chaque chaînon ait un diamètre inférieur

[1] Ce nombre a été choisi en vue des applications ultérieures. On ferait des raisonnements analogues à partir d'un nombre quelconque.

à Δ_0, il suffira qu'il en soit ainsi pour les chaînons extrêmes, c'est-à-dire que $6\varepsilon_0 < \Delta_0$.

En résumé, on prendra k assez grand pour que ε_0 soit inférieur à $\frac{D}{15}$ et à $\frac{\Delta}{9}$. C étant ainsi partagée en tronçons, on prend η_0 inférieur à la moitié de l'écart de deux tronçons non consécutifs. On choisit enfin α_0, β_0 juste assez grands pour que les arcs AA_0, BB_0 aient un diamètre supérieur à $4\varepsilon_0$.

Si l'on ne fixe pas Δ_0 on supprimera la condition correspondante. On sera assuré que *chaque chaînon aura un diamètre inférieur à* $6\varepsilon_0$.

Soient G_0 la chaîne ainsi construite et L_0 son contour.

19. Enfermons maintenant C dans une suite de chaînes G_0, G_1, ... G_n, ... Nous imposerons à ces chaînes la condition que les contours L_0, L_1, ..., L_n, ... qui les limitent soient intérieurs chacun aux contours qui les précèdent. Supposons G_{n-1} construite à l'aide d'éléments qui sont : un partage de C en tronçons dont le diamètre maximum est ε_{n-1}; un pavage du plan à l'aide de carrés égaux; deux nombres α_{n-1}, β_{n-1} juste assez grands pour que AA_{n-1} et BB_{n-1} aient un diamètre supérieur à $4\varepsilon_{n-1}$. Pour déterminer G_n, je partage chaque intervalle du paramètre t ayant fourni un tronçon du partage précédent en deux parties égales. Soit ε_n le diamètre maximum des tronçons ainsi obtenus. ε_n est au plus égal à ε_{n-1}. Je partage chaque carré du pavage précédent en un nombre (le même pour tous) de carrés égaux dont j'appelle le diamètre η_n. Je prends ce nombre de carrés assez grand pour que : 1° η_n soit inférieur à la moitié de l'écart minimum des groupes de deux tronçons non consécutifs de C; 2° à l'écart de C avec L_{n-1}. Enfin je choisis α_n, β_n juste assez grands pour que le diamètre de AA_n et de BB_n soit supérieur à $4\varepsilon_n$.

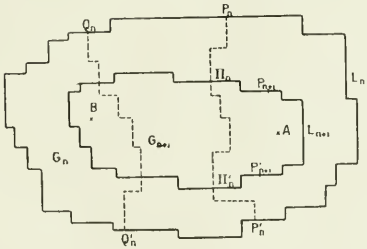
Comme ε_n est au plus égal à ε_{n-1} donc à ε_0, ε_n remplit les conditions exigées pour ε_0 et ces éléments fourniront une chaîne G_n ayant les propriétés de G_0. De plus, la deuxième condition imposée à η_n montre que tout point des chaînons de G_n est intérieur à G_{n-1}, donc que G_n est intérieure à L_{n-1}. Le diamètre des chaînons de G_n

est inférieur à $6\varepsilon_n$, donc tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

Faisons encore quelques remarques. L'arc AA_{n-1} a un diamètre supérieur à $4\varepsilon_{n-1}$, donc à $4\varepsilon_n$. Par suite, A_n *ne peut pas être en dehors de cet arc.* De même B_n est sur l'arc BB_{n-1}. Un chaînon intermédiaire de G_{n-1} provient d'un tronçon de C qui en fournira deux dans la division suivante et qui, par suite, donnera naissance à deux chaînons de G_n. *Ces deux chaînons sont entièrement intérieurs au chaînon considéré de* G_{n-1}. Le tronçon AA_{n-1} fournira le tronçon AA_n et éventuellement d'autres tronçons. Les chaînons qui en résultent pour G_n sont entièrement intérieurs à (A_{n-1}).

20. Construction de C′ (*fig.* 4). — C′ sera obtenue comme image continue de c' $(ap_n\, q_n\, b)$ au moyen des remarques suivantes :

Fig. 4.



Sur le contour L_n de G_n il y a quatre points P_n, P'_n, Q_n, Q'_n tels que les deux arcs $P_n Q_n$, $P'_n Q'_n$ empruntent chacun tous les chaînons, les points P_n, P'_n étant les seuls qui appartiennent au chaînon (A_n) et les points Q_n, Q'_n étant les seuls qui appartiennent à (B_n) (n° **6**). L'un des arcs $P_n P'_n$ du contour de (A_n) est alors tout entier intérieur à G_n. Cet arc et la portion P_n, P'_n du contour de G_n forment un contour Σ qui enferme tout (A_n), donc A. Mais B est extérieur à Σ. Par suite, L_{n+1} qui emprunte des points de (A_{n+1}) intérieur à (A_n), donc à Σ, et des points de (B_{n+1}) extérieur à A, coupe Σ. Il ne coupe pas la partie appartenant à L_n, donc il coupe l'arc $P_n P'_n$. Soit H_n le premier point de rencontre avec L_{n+1} à

partir de P_n. Je formerai un arc $P_n P_{n+1}$ en ajoutant à $P_n H_n$ celui des deux arcs $H_n P_{n+1}$ de L_{n+1} qui n'emprunte pas de points au chaînon (B_{n+1}).

Remarquons dès maintenant que H_n appartenant au chaînon (A_n) ne peut pas appartenir aux chaînons de rang supérieur à 2 de C_n. Soit $2\lambda + 1$ le nombre des chaînons de G_{n+1} qui sont entièrement intérieurs au groupe des deux premiers chaînons de G_n (n° **19**). H_n ne peut alors appartenir qu'à ces chaînons de rang au plus égal à $2\lambda + 1$. *Le chemin* $H_n P_{n+1}$ emprunte donc des parties appartenant uniquement aux $2\lambda + 2$ premiers chaînons de G_{n+1} et par suite *est intérieur au groupe des trois premiers chaînons de* G_n (n^{os} **6** et **19**).

Ceci étant, je marque sur le côté ap_0 de c' les points $p_1, p_2 \ldots, p_n, \ldots$ définis par $ap_n = \frac{ap_0}{2^n}$. Je fais correspondre les points P et p de même indice. Je fais de même correspondre le segment $p_n p_{n+1}$ à la ligne polygonale $P_n H_n P_{n+1}$ par exemple par similitude des segments homologues. Je fais des constructions et j'etablis des correspondances analogues pour les éléments désignés par la lettre Q. Je fais encore correspondre le côté $p_0 q_0$ à l'arc $P_0 Q_0$ de L_0 et enfin je fais correspondre A à a et B à b. Je vais montrer que l'*ensemble des points ainsi construits et correspondant aux points de c' constitue l'arc* C′ *cherché*. Il faut montrer pour cela :

1° C′ *n'a que les points* A *et* B *sur* C. — Ceci résulte de ce que l'arc $P_n P_{n+1}$ de C′ est, quel que soit n, extérieur à G_{n+1}, donc ne coupe pas C.

2° C′ *n'a pas de point multiple.* — Par leur construction même, les arcs $P_n P_{n+1}$ et $P_m P_{m+1}$ ne se coupent pas. De même pour $Q_n Q_{n+1}$ et $Q_m Q_{m+1}$. Il suffit donc de prouver que $P_n P_{n+1}$ ne coupe pas $Q_m Q_{m+1}$. Or $P_n P_{n+1}$ est intérieur au groupe des trois premiers chaînons de G_n, donc au groupe des trois premiers de G_0. De même $Q_m Q_{m+1}$ est intérieur au groupe des trois derniers chaînons de G_0. Comme G_0 a au moins sept chaînons, ces arcs ne se coupent pas.

3° *Les coordonnées d'un point* M *de* C′ *sont fonctions continues du paramètre qui fixe la position du point* m *correspondant sur* c'.

— Ceci est manifeste si m n'est ni en a ni en b. Il suffit donc de prouver qu'étant donné H on peut trouver h tel que $am < h$ entraîne $AM < H$. Pour cela remarquons que $P_n P_{n+1}$ étant intérieur au groupe des trois premiers chaînons de G_n, il en est de même pour tout l'arc AP_n. Ce groupe a un diamètre inférieur à $10\,\varepsilon_n$. Prenons n assez grand pour que $10\,\varepsilon_n < H$. Il suffira alors de prendre $h < ap_n$ pour réaliser les conditions imposées.

C′ étant ainsi construite, la proposition énoncée au n° **17** se trouve établie.

V. — Généralisations et applications.

21. Des faits que nous venons d'établir résulte immédiatement la propriété suivante : *si une circonférence (ou un segment de droite) possède dans son plan e une certaine propriété qui se conserve quand on fait une représentation biunivoque et continue du plan e sur un autre plan, cette propriété est aussi vérifiée dans son plan par une courbe de Jordan* C *fermée (ou ouverte) sans point multiple.*

On en déduit, en particulier, le *théorème de M. Jordan :*

Une courbe de Jordan fermée sans point multiple partage son plan en deux régions, une région intérieure bornée et une région extérieure non bornée. Deux points d'une même région peuvent être joints par une ligne continue ne coupant pas la courbe; deux points, pris chacun dans une région différente, ne peuvent pas être joints par une telle ligne. La courbe est frontière de chacune des régions. Ces propriétés sont en effet vraies pour une circonférence et se conservent dans la représentation indiquée.

De même, un arc de Jordan sans point multiple ne partage pas son plan en régions : deux points quelconques non situés sur l'arc peuvent être joints par une ligne continue ne le coupant pas.

Une *courbe de Jordan (fermée ou non) sans point multiple ne remplit aucun domaine.* Supposons, en effet, que la courbe C remplisse un domaine et soit M un point intérieur à ce domaine. Il existe une circonférence de centre M et de rayon H dont l'intérieur appartient à C. Faisons une représentation du plan de C sur le plan d'une circonférence ou d'un segment de droite et soit m l'homo-

logue de M. Il existe un nombre h tel que $mp < h$ entraîne $MP < H$. Tout l'intérieur de la circonférence de centre m et de rayon h appartiendrait donc à c, ce qui n'est pas.

Enfin, *tout point* M *d'une courbe* C *sans point multiple est accessible*, c'est-à-dire qu'il existe une ligne polygonale dont les sommets ont M pour seul point limite et qui ne touche C qu'en M. Faisons la même représentation et menons par m un segment de droite n'ayant que ce point en commun avec c. L'homologue de ce segment sera la ligne cherchée. Tout segment de cette ligne qui ne contient pas m se transforme en effet en une ligne polygonale ayant un nombre fini de sommets, puisque dans toute région ne contenant pas de points des courbes la correspondance se décompose en un nombre fini de correspondances homographiques.

22. Voici une généralisation à plusieurs courbes. Elle résulte de la remarque suivante :

Étant donné dans un plan un nombre fini de courbes sans point multiple et sans point commun, on peut enfermer chacune dans un ou deux contours polygonaux, suivant qu'elle est ouverte ou fermée, de façon que si une courbe C_1 *est intérieure à une courbe* C_2, *les polygones qui enferment* C_1 *soient intérieurs à ceux qui enferment* C_2. Je dirai que *ces polygones ont même disposition que les courbes.*

Soit ε un nombre inférieur à l'écart des courbes. Il suffit d'enfermer chaque courbe dans une chaîne régulière ouverte ou fermée, suivant sa nature, et dont chaque chaînon ait un diamètre inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$. Tout point intérieur à une des chaînes a, avec la courbe correspondante, un écart inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$ [1]. La propriété en résulte de suite.

Soient, dans un plan E, *un nombre fini de courbes* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *sans point multiple et sans point commun* (fermées ou non). *Soient, dans un plan* e, *un même nombre de courbes* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *de même*

---

[1] Ceci a été démontré pour une courbe fermée (n° **14**). La démonstration serait la même pour une courbe ouverte.

nature. Je suppose que les courbes C_i, c_i sont toutes deux ouvertes ou toutes deux fermées. Je suppose de plus que ces courbes ont la même disposition, c'est-à-dire, par exemple, que si C_1 est intérieure à C_2, c_1 sera intérieure à c_2. Je dis que je peux établir entre E et e une correspondance qui fasse correspondre les courbes de même indice.

Je peux me borner au cas où les courbes c sont des carrés ou des segments de droite. Enfermons les courbes C et les courbes c dans les contours polygonaux indiqués au début de ce numéro.

Considérons d'abord une courbe fermée C enfermée dans une chaîne G_0 limitée par deux contours L_0, L_0' et la courbe correspondante c enfermée de même dans une chaîne g_0 limitée par l_0, l_0'. Je supposerai, quitte à changer t en $1-t$ pour c, que si l'on décrit L_0 en rencontrant successivement les chaînons (1), (2), ..., (n) et si l'on décrit l_0 de la même façon, les sens de rotation sont les mêmes pour les deux plans E et e. J'établis alors entre G_0 et g_0 la correspondance du n° **15**.

Supposons maintenant C et c ouvertes. Soient L et l les contours qui les enferment. Je ferme C par un arc C′ intérieur à L et c par un contour c' que je peux aussi supposer être un carré, à condition de prendre c assez petit. Je suis ramené au cas précédent, les polygones L et l jouant le rôle des contours L et l du n° **15**. Pour avoir comme tout à l'heure le même sens de description sur L et l, il ne sera pas nécessaire de changer de paramètre pour c, il suffira, si c'est nécessaire, de remplacer c' par son symétrique par rapport à la droite c.

Les portions du plan qui restent sont alors des domaines polygonaux deux à deux de même connexité et limités par des contours se correspondant avec des sens de description concordants. Par l'adjonction de lignes convenablement choisies comme il a été fait au n° **15**, je les ramène à des polygones auxquels j'applique la correspondance du n° **1**, ce qui établit la proposition.

En particulier, si *les courbes C et c sont toutes ouvertes, on pourra ainsi étendre à la totalité des deux plans toute correspondance entre ces courbes*, puisque, dans ce cas, nous n'avons pas été obligé de changer de paramètre. Il pourra ne plus en être de même si certaines des courbes sont fermées et l'on ne pourra étendre que cer-

taines correspondances, mais il en existe toujours de cette sorte.

Si les courbes n'ont pas même disposition, l'extension est encore possible à un voisinage (l'intérieur des chaînes construites par exemple), *mais ne peut pas s'étendre à la totalité des plans.* Supposons par exemple C_2 intérieure à C_1 et c_2 extérieure à c_1 et admettons que la correspondance entre ces courbes s'étende à la totalité des plans E et e. Soient M et m deux points homologues sur C_2 et c_2. Soient P, p deux points homologues quelconques. La distance $mp = h(P)$ est fonction continue des coordonnées de P. Définissons cette fonction pour toutes les positions de P intérieures à C_1 ou sur C_1. Ce domaine étant borné et fermé, $h(P)$ a un maximum h fini. Si $mp > h$, P sera extérieur à C_1. Or dans la région non bornée qui contient c_2, il y a des points p qui peuvent être joints à m par un chemin ne coupant pas c_1 et tels que $mp > h$. Le point P homologue serait donc extérieur à C_1. Ceci est impossible puisque l'homologue du chemin mp joindrait M et P sans couper C_1.

23. Je me borne à énoncer la généralisation suivante dont la démonstration est immédiate.

Soit dans E *une infinité dénombrable* de courbes sans point commun $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, et dans e une infinité dénombrable de courbes $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$. Supposons que C_n soit extérieure à une circonférence de centre O et de rayon R_n et c_n extérieure à une circonférence de centre o et de rayon r_n. Supposons que R_n et r_n croissent indéfiniment avec n. On pourra étendre la correspondance entre les courbes C et c dans les cas suivants :

1° Les courbes C et c sont toutes ouvertes;

2° Les courbes C et c sont toutes fermées et extérieures les unes aux autres;

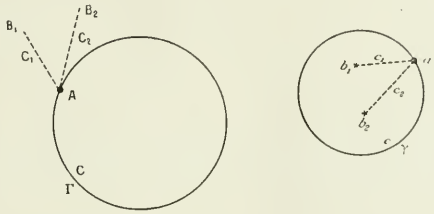
3° Les courbes C et c sont fermées. C_n est intérieure à C_{n+1} et c_n est intérieure à c_{n+1} quel que soit n.

24. Si C et c sont deux courbes de Jordan ayant des points multiples et homéomorphes, leur correspondance peut, selon les cas, s'étendre à tout le plan, s'étendre seulement à leurs voisinages,

ou même ne peut s'étendre à aucun voisinage. Voici deux exemples de ces derniers cas.

Premier exemple. — C est constitué par une circonférence Γ et par deux segments de droite C_1 C_2 (AB_1 et AB_2) ayant une extrémité commune A sur Γ et extérieurs à Γ. c est constitué de même, mais les deux segments c_1, c_2 sont intérieurs à γ (*fig.* 5). C et c sont

Fig. 5.

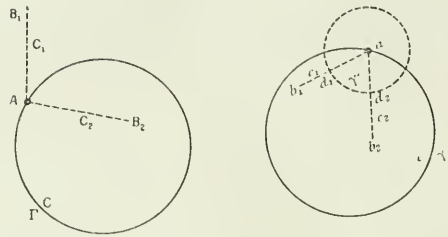


homéomorphes et il existe une correspondance entre ces arcs qui s'étend à leurs voisinages. Je dis qu'il n'existe pas de correspondance entre C et c s'étendant à tout le plan. Une telle correspondance doit d'abord faire correspondre les seuls points multiples A et a et aussi les points frontières, B_1 avec b_1 par exemple et B_2 avec b_2. Elle fera donc correspondre Γ et γ, C_1 et c_1, C_2 et c_2. Soit Γ' une portion de C_1 ne contenant pas A, donc extérieure à Γ. Il lui correspond une portion γ' de c_1, donc intérieure à γ. Par suite γ et Γ' n'ont pas même disposition que γ et γ'. On ne peut donc pas étendre leur correspondance à tout le plan (n° **22**). On ne peut donc pas étendre à tout le plan la correspondance entre C et c.

Deuxième exemple. — Les courbes C et c sont constituées de la même manière, sauf que C_2 est intérieure à Γ (*fig.* 6). Une correspondance entre C et c ne peut s'étendre à aucun voisinage. Supposons qu'il existe une correspondance entre C et c pouvant s'étendre à leurs voisinages. Elle fera correspondre, comme tout à l'heure, Γ et γ, C_1 et c_1, C_2 et c_2, A et a, B_1 et b_1, B_2 et b_2. Il existe une circonférence γ_1 de centre a, coupant c_1 et c_2 en des points d_1 et d_2 et appartenant au voisinage de c auquel peut s'étendre la

correspondance. Soit γ' l'arc $d_1 d_2$ de γ_1 qui ne coupe pas γ. Il doit lui correspondre un arc Γ' ne coupant pas Γ et joignant un point D,

Fig. 6.



de C_1 à un point D_2 de C_2. Mais ceci est impossible puisque C_1 est extérieur et C_2 intérieur à Γ.

23. Comme application de la propriété du n° **22** nous donnerons les propriétés suivantes, qui nous serviront souvent :

THÉORÈME. — *Soient, dans un plan* E, *deux courbes fermées sans point multiple* C_0, C_1 *intérieures à une même courbe fermée sans point multiple* C *et ne la touchant pas. On peut passer de* C_0 *à* C_1 *par une déformation homéomorphe de* E *n'altérant que l'intérieur de* C.

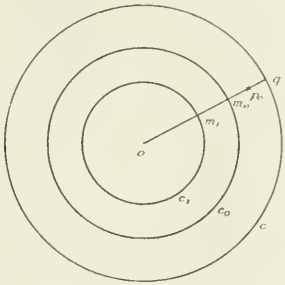
Par déformation homéomorphe d'un espace ou d'une variété V, il faut entendre les déformations continues de V au cours desquelles des points distincts de V restent distincts.

Supposons d'abord que C_0 et C_1 ne se touchent pas et que C_1 est intérieure à C_0. Nous pouvons alors faire une représentation de E sur un plan e de façon que les trois courbes C, C_0, C_1 soient représentées par trois circonférences c, c_0, c_1, ayant même centre o; c_1 étant intérieure à c_0 et c_0 intérieure à c (n° **22**) (*fig.* 7). Il suffit alors de prouver la possibilité de la déformation indiquée pour les courbes du plan e. Nous allons définir cette déformation.

Nous indiquerons les divers stades de la déformation par les différentes valeurs d'un paramètre θ variant de 0 à 1, la valeur 0 correspondant au stade initial et la valeur 1 au stade final.

Soient m_0 un point de c_0 et m_1 le point où la demi-droite om_0 coupe c_1. Pour le stade θ nous prendrons pour transformé de m_0 le point m du segment $m_0 m_1$ tel que $\frac{mm_0}{m_0 m_1} = \theta$. Soit p_0 un point quelconque de l'intérieur de c. La demi-droite op_0 coupe c_0 en un point m_0, c_1

Fig. 7.



en un point m_1 et c en un point q. Si p_0 est entre q et m_0, je prendrai pour position de p_0 au stade θ le point p de oq tel que $\frac{pq}{p_0 q} = \frac{mq}{m_0 q}$, m étant le point défini précédemment. Si p_0 est entre o et m_0, je prendrai p tel que $\frac{po}{p_0 o} = \frac{mo}{m_0 o}$. Quand on fait varier θ de 0 à 1, l'intérieur de c se déforme et cette déformation réalise manifestement les conditions imposées.

Si C_1 n'est pas intérieur à C_0, nous nous ramènerons à ce cas en passant par l'intermédiaire d'une courbe C' (dont nous allons prouver l'existence), intérieure à C et ayant C_0 et C_1 à son intérieur. On déformera d'abord l'intérieur de C de façon à amener C_0 sur C', puis de façon à amener C' sur C_1. Pour prouver l'existence de C', faisons une représentation de E sur un plan c de façon que C soit représentée par une circonférence c. C_0 et C_1 sont alors représentées par deux courbes c_0, c_1 ne touchant pas c. Ces courbes ont un écart non nul avec c; donc on peut construire une circonférence c' concentrique à c, intérieure à c et ayant c_0 et c_1 à son intérieur. L'image de c' est la courbe C' cherchée. Le théorème est démontré.

26. *La même propriété a lieu si les courbes* C_0, C_1 *sont ouvertes.* Si C_0 et C_1 ne se coupent pas, nous ferons la représentation de E sur un plan e de façon que C soit représentée par une circonférence c, C_0, C_1 par deux arcs de circonférences c_0, c_1 ayant même centre que c et homothétiques par rapport à ce centre. Si nous complétons les circonférences c_0, c_1 et que nous fassions la déformation du plan e indiquée au numéro précédent, elle réalisera les conditions exigées.

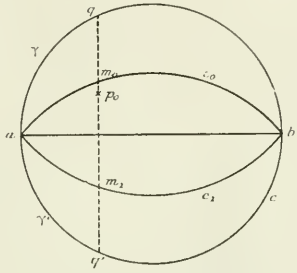
Si C_0 et C_1 se coupent, nous passerons par l'intermédiaire d'un arc C' intérieur à C et ne coupant ni C_0 ni C_1. Un tel arc existe, puisque ni C_0 ni C_1, ni par suite leur ensemble, ne peuvent remplir l'intérieur de C.

27. *Soient dans un plan* E *une courbe fermée sans point multiple* C *et deux courbes ouvertes sans point multiple* C_0, C_1 *intérieures à* C, *sauf leurs extrémités* A, B *qui leur sont communes et qui appartiennent à* C. *On peut passer de* C_0 *à* C_1 *par une déformation homéomorphe de* E *n'altérant que l'intérieur de* C.

Désignons par Γ, Γ' les deux arcs de C déterminés par A et B. Supposons d'abord que C_0 et C_1 n'ont en commun que leurs extrémités A et B. L'intérieur de C est divisé en trois régions ayant respectivement pour frontières les courbes $\Gamma + C_0$, $C_0 + C_1$, $C_1 + \Gamma'$. Considérons dans un plan e une circonférence c sur laquelle nous marquons deux points diamétralement opposés ab. Joignons ces points à l'intérieur de c par deux arcs de cercle c_0, c_1. Appelons γ, γ' les deux arcs de c déterminés par a et b (*fig.* 8). L'intérieur de c est partagé en trois régions ayant pour frontières respectives $\gamma_0 + c_0$, $c_0 + c_1$, $c_1 + \gamma'$. Faisons une représentation de E sur e faisant correspondre $\Gamma_0 + C_0$ à $\gamma + c_0$, A et a, B et b et conservons de cette représentation ce qui concerne les intérieurs de ces courbes. Faisons de même pour les courbes $C_0 + C_1$, $c_0 + c_1$, en ayant soin que la correspondance entre C_0 et c_0 soit la même que celle obtenue dans la correspondance précédente. Enfin opérons de même pour $C_1 + \Gamma'$ et $c_1 + \gamma'$ avec la même précaution pour C_1 c_1. Il ne nous reste plus qu'à déformer l'intérieur de c de façon à amener c_0 sur c_1.

Il en résultera la déformation cherchée. La déformation de l'intérieur de c s'obtiendra par un procédé analogue à celui du n° 25. Il suffira de faire décrire à chaque point une portion de la perpendiculaire au diamètre ab et d'écrire les mêmes égalités où les

Fig. 8.



points o et q auraient été remplacés par les deux points de rencontre de cette perpendiculaire avec c.

Si C_0, C_1 se coupent, il me suffira de passer par l'intermédiaire d'un arc C' d'extrémités A, B, intérieur à C et ne touchant C_0, C_1 qu'en A et B. Prouvons l'existence d'un tel arc.

Pour cela, faisons une représentation de E sur un plan e de façon que C soit représentée par une circonférence c. C_0 C_1 sont alors représentées par deux arcs de Jordan c_0, c_1 aboutissant aux deux points a, b homologues de A, B. Partageons l'un des arcs ab de c en deux parties égales par un point m_0. Partageons l'arc am_0 en deux parties égales par un point m_0. L'arc $m_0 m_1$ a un écart non nul avec c_0 et c_1. On peut donc construire un arc $p_0 q_1$ concentrique à $m_0 m_1$ et homothétique et ne rencontrant ni c_0 ni c_1. Il en sera de même des portions de rayons $m_0 p_0$ et $m_1 q_1$. D'une façon générale, je partagerai l'arc am_{n-1} en deux parties égales par un point m_n et j'en déduis un arc homothétique et concentrique à $m_{n-1} m_n$, soit $p_{n-1} q_n$, qui ne coupe pas c_0 et c_1. Je fais les mêmes constructions pour l'arc bm_0. La courbe c', somme des arcs $p_{n-1} q_n$ et des segments rectilignes $p_n q_n$, réalise les conditions exigées. Le théorème est démontré.

Remarquons que comme courbe auxiliaire C' nous pouvons prendre une ligne polygonale dont l'ensemble des sommets a pour seuls points limites les points A et B. Il suffit qu'il en soit de même pour c'. La correspondance entre E et e se décompose en effet en un nombre fini de correspondances homographiques pour toute région qui ne contient pas de points de C ou c (n° **16**). Or, on peut manifestement prendre pour c' une telle ligne; il suffit de remplacer les arcs p_{n-1}, q_n par des lignes polygonales voisines.

CHAPITRE II.

LES COURBES DE JORDAN DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

I. — Remarques sur les variétés enlacées et les surfaces simplement connexes.

28. J'aurai à utiliser, dans ce Chapitre et dans le Chapitre III de la deuxième Partie, certaines propriétés des courbes enlacées relativement aux surfaces simplement connexes. Ces propriétés se généralisent à un espace quelconque; je vais les établir dans toute leur généralité. Je rappellerai d'abord les définitions et les propriétés des variétés enlacées, données par M. Lebesgue [1] et par M. Brouwer [2].

La notion de *variétés enlacées* a été introduite par M. Lebesgue, qui l'a utilisée pour démontrer qu'une variété fermée à $n-1$ dimensions partage en régions l'espace à n dimensions. En voici la définition : Soient dans l'espace à $p+q+1$ dimensions deux variétés fermées T_p, T_q à p et q dimensions. Ces variétés sont *enlacées* si, t_p et t_q étant deux variétés polygonales très voisines de T_p et de T_q et leur correspondant, au cours de la déformation continue réduisant t_p, par exemple, à un point non situé sur t_q, il y a un nombre impair de traversées de t_q par t_p.

---

[1] H. Lebesgue, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 27 mars 1911.

[2] Brouwer, *On looping coefficients* (*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, 25 juin 1912, pages 113-121).

M. Brouwer a repris cette définition et a défini en même temps un nombre entier dit *coefficient d'enlacement* des deux variétés. Sa valeur absolue ne dépend que des variétés. Le signe dépend de la définition du sens positif sur chaque variété [1] et de l'ordre dans lequel on les considère. Les variétés enlacées, d'après la définition de M. Lebesgue, ont un coefficient d'enlacement impair.

29. Soient V_h, V_{n-h-1} deux variétés fermées à h et $n-h-1$ dimensions dans l'espace E_n à n dimensions. M. Brouwer démontre sur leur coefficient d'enlacement les propriétés suivantes que nous pouvons prendre pour définition de ce coefficient.

Le coefficient d'enlacement ne change pas si l'on déforme de façon continue l'une d'elles sans toucher l'autre. Il ne change pas non plus si l'on remplace chaque variété par une variété polygonale lui correspondant et très voisine. On peut préciser les mots *très voisines* en disant que les points homologues ont une distance inférieure à la moitié de l'écart des deux variétés.

Pour le calcul du coefficient d'enlacement, il nous suffira donc de considérer deux variétés polygonales v_h, v_{n-h-1}. Construisons une calotte v_{n-h} de variété polygonale à $n-h$ dimensions ayant pour frontière v_{n-h-1}. Choisissons v_{n-h} de façon que (ce qui est toujours possible) v_h et v_{n-h} n'aient qu'un nombre fini de points communs. v_h et v_{n-h} étant décomposées en tétraédroïdes, nous supposerons en outre que ces points n'appartiennent pas à leurs frontières. Soit m un point commun intérieur aux deux tétraédroïdes t_h et t_{n-h}. v_h et v_{n-h-1} (et par suite v_{n-h}) étant orientées, ces tétraédroïdes le sont. Il en résulte un ordre pour leurs sommets. Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_h$ et $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_h$ ces ordres. Menons par O les vecteurs $OA_1, OA_2, \ldots, OA_h$, $OB_1, OB_2, \ldots, OB_{n-h}$ équipollents à $a_0a_1, a_0a_2, \ldots, b_0b_1, \ldots, b_0b_{n-h}$. Si le tétraédroïde à n dimensions de sommets $OA_1, A_2, \ldots, A_h, B_1, B_2, \ldots, B_{n-h}$ dont les sommets sont pris dans cet ordre, oriente l'espace comme les

[1] Les variétés dont il sera question sont toujours bilatères, c'est à cette seule condition qu'on peut définir sur elles un sens positif.

axes de coordonnées, nous dirons que v_h traverse positivement v_{n-h} en m et nous représenterons cette traversée par le nombre $+1$. Si les orientations sont inverses, nous aurons une traversée négative représentée par -1. Le coefficient d'enlacement est la somme algébrique de ces nombres pour tous les points tels que m.

Envisageons une déformation continue de v_h réduisant v_h à un point non situé sur v_{n-h-1}. On définit de même un nombre affecté à chaque point de traversée de v_{n-h-1} par v_h au cours de la déformation. Sa définition fait intervenir les tétraédroïdes qui se touchent et le vecteur représentant le déplacement du point commun. On démontre encore que le coefficient d'enlacement est la somme algébrique de ces nombres. Ceci n'est pas autre chose que la définition de M. Lebesgue.

Si l'on peut réduire l'une des variétés à zéro en coupant l'autre un nombre fini de fois, ou si une calotte limitée par l'une coupe l'autre en un nombre fini de points, il ne sera pas nécessaire de faire appel à des variétés polygonales : ces points, en nombre fini, permettront de calculer le coefficient d'enlacement. En particulier, si l'on peut réduire l'une des variétés à un point non situé sur l'autre sans couper celle-ci, les deux variétés ne sont pas enlacées.

30. Surfaces simplement connexes de l'espace à n dimensions. — On appelle *ainsi* une variété fermée homéomorphe à une hypersphère à $n-1$ dimensions. Elle peut donc être regardée comme constituée de deux éléments de surface et est homéomorphe à la frontière d'un tétraédroïde à n dimensions. On appelle *calotte simplement connexe* dans le même espace une variété non fermée à $n-1$ dimensions constituée par un seul élément. Elle est homéomorphe à un tétraédroïde à $n-1$ dimensions, ou encore à une demi-hypersphère à $n-1$ dimensions, ou encore à une hypersphère à $n-2$ dimensions de l'espace à $n-1$ dimensions et à son intérieur.

Soit S une surface simplement connexe de l'espace E_n. Étant homéomorphe à une hypersphère Σ à $n-1$ dimensions de cet

espace, je peux supposer établie une correspondance biunivoque et continue entre S et Σ. Pour étudier les propriétés de S, il sera commode de définir les *tétraédroïdes sphériques* de Σ.

Soient α, β deux points de Σ non en ligne droite avec le centre O. Les points O, α, β déterminent un plan à deux dimensions qui coupe Σ suivant une hypersphère Σ_1 à une dimension (circonférence). α, β partagent Σ_1 en deux parties. J'appelle le tétraédroïde sphérique à une dimension de sommets α, β, l'arc de Σ_1 limité par ces points et inférieur à la moitié de Σ_1.

Supposons définis les tétraédroïdes sphériques jusqu'à la dimension $h-1$. Soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, $h+1$ points de Σ non dans un même plan à h dimensions avec O. Ces points et le point O définissent un plan à $h+1$ dimensions qui coupe Σ suivant une hypersphère Σ_h à h dimensions. Les $h+1$ points $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ peuvent former $h+1$ groupes de h points, chaque groupe définissant un tétraédroïde sphérique à $h-1$ dimensions. Ces $h+1$ tétraédroïdes forment une variété fermée sans point multiple à $h-1$ dimensions qui partage Σ_h en deux régions. J'appelle *tétraédroïde sphérique à h dimensions de sommets* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ celle des régions de Σ_h inférieure à la moitié de Σ_h. Ces définitions sont valables jusque $h = n-1$.

J'en déduis la définition de l'*élément à h dimensions* de S ayant pour sommets $h+1$ points A, B, ..., L. J'appelle ainsi le correspondant sur S du tétraédroïde sphérique à h dimensions de Σ qui a pour sommets les points $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ homologues de A, B, ..., L.

51. Théorème. — *Étant donné un nombre Δ_1, il existe un nombre ε_1 tel que tout élément à h dimensions d'une surface simplement connexe S, dont les sommets ont des écarts mutuels inférieurs à ε_1, soit intérieur à une hypersphère à $n-1$ dimensions de rayon Δ_1.*

Les fonctions qui définissent la correspondance de S et Σ sont continues et définies sur des ensembles fermés, donc uniformément continues. Par suite, à Δ_1 je peux faire correspondre η_1 tel que $\alpha\beta < \eta_1$ entraîne $AB < \Delta_1$. De même, à η_1 je peux faire correspondre ε_1 tel que $CD < \varepsilon_1$ entraîne $\gamma\delta < \eta_1$. Ce nombre ε_1 est le nombre cherché.

Si en effet A, B, ... L ont des distances mutuelles inférieures à ε_1, α, β, ... λ ont des distances mutuelles inférieures à η. On voit alors facilement que tout point m du tétraédroïde sphérique α, β, ..., λ est à une distance de α inférieure à η, donc tout point M de l'élément A, B, ..., L est à une distance de A inférieure à Δ_1.

Le nombre ε_1 est manifestement inférieur à Δ_1; il est valable quel que soit le nombre des points A, B, ..., L jusqu'à la valeur n de ce nombre.

THÉORÈME. — *Étant donné le nombre Δ, il existe un nombre ε_2 tel que a, b, ..., l étant $h+1$ points ayant des distances mutuelles inférieures à ε_2 et chacun ayant avec S un écart inférieur à ε_2, on peut amener le tétraédroïde t_h, ayant ces points pour sommets, sur un élément T_h de S par une déformation continue au cours de laquelle chaque point de t_h conserve avec S un écart inférieur à Δ.*

Prenons le nombre ε_1 correspondant par le théorème précédent à $\Delta_1 = \frac{1}{2}\Delta$ et $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}\varepsilon_1$. Ce nombre satisfait aux conditions imposées. Soient, en effet, A, B, ..., L des points de S tels que Aa, Bb, ..., Ll soient inférieurs à ε_2. Il en résulte que les points A, B, ..., L ont des écarts mutuels inférieurs à ε_1 et par suite que tout l'élément T_h ayant pour sommets ces points est intérieur à une sphère de centre A et de rayon Δ_1, donc de diamètre Δ. On a aussi Aa, Ab, ..., $Al < \varepsilon_1$, donc t_h est intérieur à cette sphère. Donc tout le tétraédroïde t_h est intérieur à cette sphère. Considérons le tétraédroïde sphérique τ_h ayant pour sommets les points α, β, ..., λ homologues de A, B, ..., L. τ_h et t_h sont homéomorphes, donc aussi t_h et T_h. Réalisons la correspondance entre t_h et T_h et faisons décrire à un point m de t_h le segment de droite qui le joint à son homologue M de T_h. Faisons de même pour tous les points tels que m en supposant qu'à un même instant, les segments tels que mM seront partagés par la position prise par m dans un même rapport. Nous amenons ainsi t_h sur T_h. Mais le segment Mm est intérieur à la sphère envisagée plus haut. Donc $Mm < \Delta$ et m garde au cours de la déformation un écart inférieur à Δ avec M donc avec S.

Remarquons que la déformation continue que nous envisageons ici pour t_h ne laisse pas t_h constamment homéomorphe à lui-même, car il se présentera en général des points multiples au cours de cette déformation. Il n'en était pas de même pour les déformations envisagées aux n^{os} **25**, **26** et **27**.

THÉORÈME. — *Le nombre ε_2 du théorème précédent est tel que toute variété polygonale v_h à h dimensions ($h \leq n - 2$) dont chaque point a avec S un écart inférieur à ε_2 peut se réduire à zéro, chaque point de v_h gardant, au cours de cette déformation, un écart inférieur à Δ, avec S.*

Décomposons v_h en tétraédroïdes tels que pour chacun d'eux les sommets aient des distances mutuelles inférieures à ε_2. A chaque sommet a nous faisons correspondre un point A de S tel que $Aa < \varepsilon_2$. Faisons correspondre chaque tétraédroïde de v_h à un élément de S avec la condition suivante : Une face à $h - 1$ dimensions commune à deux tétraédroïdes aura pour homologue un élément à $h - 1$ dimensions de S, la correspondance étant la même quel que soit celui des deux tétraédroïdes de v_h auquel on fait appartenir cette face. Cette correspondance est rendue possible par l'intermédiaire des tétraédroïdes sphériques. La déformation indiquée ci-dessus amène alors v_h sur une variété V_h de S en remplissant les conditions imposées.

V_h a pour homologues sur Σ une variété V' formée d'un nombre fini de tétraédroïdes sphériques ayant moins de $n - 1$ dimensions. Donc V' ne remplit pas tout Σ. On peut alors ramener V' à zéro sur Σ comme on le voit facilement en faisant une inversion ayant pour pôle un point de Σ non sur V'. Dans cette inversion, une portion de Σ contenant tout V' devient l'intérieur d'une sphère à $n - 2$ dimensions d'un espace à $n - 1$ dimensions. La réduction à zéro à l'intérieur de cette sphère est immédiate. Donc V peut se réduire à zéro sur S. La réunion des deux déformations indiquées démontre le théorème.

THÉORÈME. — *Étant donné Δ, on peut déterminer ε tel que toute variété V_h à h dimensions ($h \leq n - 2$) dont chaque point a, avec S, un écart inférieur à ε peut se réduire à zéro, chacun de ses points gardant avec S un écart inférieur à Δ.*

Nous pouvons prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_2$, ε_2 étant le nombre déterminé par le théorème précédent. Prenons en effet une variété polygonale v_h correspondant à V_h et dont chaque point ait avec son homologue sur V_h un écart inférieur à ε. Soit M un point de V_h, m son homologue sur v_h et M′ un point de S tel que $MM' < \varepsilon$. On a alors $M'm < \varepsilon_2$, et comme on a aussi $MM' < \varepsilon_2$, tout point du segment Mm est à une distance de M′ inférieure à ε_2. On peut donc passer de V_h à v_h de façon que tout point garde avec S un écart inférieur à ε_2, donc à Δ. Mais v_h est dans les conditions du théorème précédent. Le théorème est établi.

32. Théorème. — *Soient S une surface simplement connexe sans point multiple et d un ensemble de points dont chacun a avec S un écart supérieur à un certain nombre Δ. Il existe un nombre ε tel que toute variété V_h à h dimensions ($h \geq n - 2$), dont chaque point a avec S un écart inférieur à ε, n'est enlacée avec aucune des variétés à $n - h - 1$ dimensions qu'on peut constituer avec les points de d.*

Le nombre ε déterminé par le théorème précédent remplit ces conditions. On peut en effet réduire V_h à zéro, chaque point de V_h gardant avec S un écart inférieur à Δ, donc sans couper d.

Ces théorèmes sont encore vrais si S est une calotte simplement connexe sans point multiple, homéomorphe par définition à une demi-hypersphère Σ à $n - 1$ dimensions. Le théorème précédent est même dans ce cas valable pour $h = n - 1$. En effet, on peut toujours réduire à zéro sur la demi-hypersphère Σ une variété à $n - 1$ dimensions tracée sur elle. Ceci tient à ce que Σ est homéomorphe à un tétraédroïde à $n - 1$ dimensions.

33. Soient une surface simplement connexe sans point multiple S et d un ensemble de points dont chacun a avec S un écart supérieur à Δ. Considérons le nombre ε donné par le théorème précédent. Envisageons maintenant un pavage de l'espace E_n à l'aide de cubes à n dimensions, égaux et ayant un diamètre inférieur à ε. Conservons ceux de ces cubes qui touchent S. Ils forment un domaine D d'un seul tenant, contenant S à son intérieur et dont

chaque point a avec S un écart inférieur à ε. Donc toute variété ayant au plus $n-2$ dimensions, tracée dans D, n'est enlacée avec aucune des variétés extraites de d. D est un domaine limité par des variétés polygonales à $n-1$ dimensions.

Je dirai, pour abréger, qu'en construisant D, *j'ai enfermé* S *dans un domaine polygonal* D *non enlacé avec* d.

La même définition s'applique si S est une calotte simplement connexe sans point multiple. Les variétés envisagées dans D peuvent alors aussi avoir $n-1$ dimensions.

34. Comme première application de ces propriétés, démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient, dans l'espace à n dimensions* E_n, *une surface simplement connexe sans point multiple* S *et deux variétés fermées* V_h, V_{n-h-1}, *à h et* $n-h-1$ *dimensions, sans point commun, enlacées, et sans point commun avec* S. *Ces deux variétés sont dans une même région de* S.

Dans cet énoncé, on suppose $1 \leq h \leq n-2$, donc $n \geq 3$.

Enfermons S dans un domaine polygonal D non enlacé avec l'ensemble $V_h + V_{n-h-1}$. Soit V' une variété polygonale correspondant point à point à V_h, très voisine de V_h, de sorte qu'elle n'a pas de points communs avec D. V' et V_{n-h-1} sont enlacées. Je dis que V_{n-h-1} et V', donc aussi V_h, sont dans la même région extérieure à D, donc dans la même région par rapport à S. Faisons en effet passer par V' une calotte polygonale à $h+1$ dimensions W et modifions-la légèrement, si c'est nécessaire, de façon qu'une variété à r dimensions de W ne coupe une variété à s dimensions limitant D que pour $r+s > n$. Dans ces conditions, les intersections de W et de la frontière de D sont des variétés polygonales à h dimensions $V'_1, V'_2, \ldots, V'_p$. Nous ne considérons que celles qui limitent la portion W_0 de W située dans la région R extérieure à D qui contient V'.

Si V_{n-h-1} n'était pas dans cette région R, W_0 ne rencontrerait pas V_{n-h-1}. Donc (n° **29**), la somme des coefficients d'enlacement des variétés V', V'_1, V'_2, ..., V'_p avec V_{n-h-1} serait nulle, et

comme $V'_1, V'_2, \ldots, V'_p$, tracées sur D, ne sont pas enlacées avec V_{n-h-1}, il en serait de même de V', donc de V.

Il faut remarquer que les variétés V', W, V'_1, V'_2, ..., V'_p peuvent avoir des points singuliers. Mais cela n'influe à aucun moment sur notre raisonnement, car, si l'on décompose ces variétés en éléments convenablement choisis, ces éléments seront sans points singuliers; seulement il arrivera que deux éléments aient des points communs bien qu'ils ne doivent pas être considérés comme contigus, de sorte qu'il faudra parfois considérer des points géométriquement confondus comme analytiquement distincts.

II. — Les courbes planes et les courbes sphériques.

55. Nous allons étendre les résultats du Chapitre I et justifier l'énoncé suivant : Soient, dans l'espace E_3, deux courbes de Jordan sans point multiple C et c (toutes deux ouvertes ou toutes deux fermées) planes ou sphériques, on peut passer de l'une à l'autre par une déformation homéomorphe de l'espace, n'altérant qu'une région bornée. Il en résultera que la correspondance entre C et c s'étend à tout l'espace.

56. Théorème. — *Si, par une déformation homéomorphe d'une surface bornée* S *en elle-même, laissant fixes les points frontières de* S, *s'il y en a, on peut transformer une figure* F *en une figure* F'; *on peut aussi transformer* F *en* F' *par une déformation homéomorphe d'une partie bornée de l'espace en elle-même, pourvu que, en chaque point* m *de* S, *il existe une normale à* S *qui varie de façon continue avec* m, *et pourvu que, pour* H *assez petit, le segment* $N'mN$ *normal à* S, *de milieu* m *et de longueur* 2 H *passe, quand* m *varie sur* S, *une seule fois par chaque point du domaine* D *qu'il balaie.*

Tout point P de D est bien déterminé par le pied m du segment normal, unique, qui passe par P et par le nombre h, $(-H \leq h \leq +H)$, qui mesure le segment mP, le sens positif étant celui des normales dirigées d'un côté déterminé de S. Le point P sera dit *le point* $\{m, h\}$.

La déformation homéomorphe de S' est supposée donnée en

fonction d'un paramètre t variant de 0 à 1 : $p[m, t]$ désigne la position, à l'instant t, du point qui, à l'instant 0, est sur S en m.

La déformation homéomorphe de l'espace est ainsi définie : elle laisse immobiles les points extérieurs à D. Le point P qui, à l'instant 0, était en $\{m, h\}$ est, à l'instant t, $(0 < t < 1)$, en

$$\left\{p\left[m, t\left(1 - \frac{|h|}{H}\right)\right], h\right\}.$$

37. Soient deux courbes C et c d'un même plan. Enfermons-les dans une courbe sans point multiple Γ (une circonférence par exemple). On peut passer de C à c par déformation de l'intérieur de Γ (nos **25** et **26**). Or l'intérieur de Γ remplit les conditions du théorème précédent, donc on peut passer de C à c par la déformation indiquée au no **35**.

Le cas des courbes planes non situées dans un même plan sera étudié au numéro suivant.

38. Courbes sphériques. — Soit C une courbe de Jordan sans point multiple tracée sur une sphère S. Je dis qu'il existe un point O de S non situé sur C. Soit M un point de C, transformons S en un plan Σ par une inversion de centre M et partageons C en deux arcs C′, C″ par deux points situés de part et d'autre de M. L'arc C″ contient M; nous le supposons assez petit pour que son transformé Γ″ soit tout entier extérieur à une circonférence λ du plan Σ. L'arc L′ transformé de C′ ne remplit pas tout λ; il y a donc, dans λ, un point ω qui n'appartient ni à Γ′ ni à Γ″. Son transformé O répond à la question.

Il suffit maintenant de faire une inversion de centre O pour déduire les propriétés de la courbe sphérique C de celles des courbes planes et prouver en particulier la possibilité de transformer, de façon continue, une courbe sphérique en une autre tracée sur la même sphère.

Soient maintenant deux courbes fermées C et c tracées sur des plans ou sphères P, p. Coupons P et p par une sphère S qui donne les intersections Γ, γ. Nous savons déformer C en Γ, puis Γ en γ, enfin γ en c; si C et c étaient ouvertes nous pourrions les considérer

comme des parties de deux courbes fermées $C + C'$, $c + c'$. L'énoncé du n° **33** est établi.

III. — Les courbes tracées sur le tore.

39. Soit T un tore dont nous désignerons les deux rayons par r et R ($r < R$). Supposons que l'origine des coordonnées soit au centre du tore et que l'axe des z soit l'axe du tore. Nous pouvons alors exprimer les coordonnées x, y, z d'un point M quelconque de T en fonction de deux paramètres ω, φ par les formules

$$(1) \qquad (T) \begin{cases} x = (R + r\cos 2\pi\varphi)\cos 2\pi\omega, \\ y = (R + r\cos 2\pi\varphi)\sin 2\pi\omega, \\ z = r\sin 2\pi\varphi. \end{cases}$$

A chaque système de valeurs de ω, φ correspond un point et un seul de T et à chaque point de T correspond un système de valeurs de ω, φ dont chacune est définie à un entier près.

Soit un plan H dans lequel nous avons pris deux axes de coordonnées $o\omega$, $o\varphi$. A un point M de T nous ferons correspondre le point m de H qui a pour coordonnées les valeurs ω, φ des paramètres de M. Si l'on prend les divers systèmes possibles pour ω, φ, on obtient les diverses représentations de M sur H. Ces représentations se déduisent de l'une d'elles par les translations définies par des vecteurs dont chacune des projections est entière. Considérons dans H les parallèles aux axes d'abscisse ou d'ordonnée entière. Ces droites décomposent H en carrés dont chacun représente une fois et une fois seulement tout T, sauf en ce qui concerne les frontières de ces carrés pour lesquelles il y a lieu de prendre une précaution évidente.

Soit s une région de H limitée par une courbe de Jordan sans point multiple. s représente une certaine région S de T. Supposons qu'il n'existe *aucun vecteur de projections entières* dont les deux extrémités appartiennent à s (frontière comprise). Dans ces conditions la correspondance entre S et s est *biunivoque et continue*. S est alors une calotte simplement connexe sans point multiple.

40. Soit C une courbe de Jordan tracée sur Π. x, y, z sont fonctions continues d'un paramètre t que nous supposerons varier de 0 à 1. Pour chaque point de la courbe, on peut alors définir des déterminations de ω et φ fonctions continues de t :

$$\omega = \omega(t), \qquad \varphi = \varphi(t). \tag{2}$$

Le point représentatif sur Π décrit alors une courbe de Jordan c. Soient α, β les accroissements respectifs de ω, φ quand t varie de 0 à 1 : $\alpha = \omega(1) - \omega(0)$, $\beta = \varphi(1) - \varphi(0)$. Ces nombres sont évidemment indépendants de la détermination prise pour ω, φ.

Si l'on changeait de paramètre en posant $t = f(t')$, les nombres α, β ne seraient pas non plus changés, sous la réserve que f soit une fonction croissante. Dans le cas contraire, ils seraient changés de signe. Ces deux nombres α, β sont donc parfaitement définis par la courbe, si on la suppose orientée.

La courbe C est *ouverte et sans point multiple*, si, a et b étant entiers, les deux équations

$$\omega(t) - \omega(t') = a, \qquad \varphi(t) - \varphi(t') = b$$

ne peuvent être vérifiées simultanément que pour $a = 0$, $b = 0$, $t = t'$. *La représentation c de* C *est alors un arc de Jordan sans point multiple.* Deux représentations différentes de C sont sans point commun; et il n'y a pas de vecteurs à projections entières dont les extrémités soient sur une même représentation de C. L'un au moins des nombres α, β relatifs à C n'est pas entier.

La courbe C définie par les fonctions (2) est *fermée et sans point multiple*, si les mêmes équations sont vérifiées seulement lorsque l'on a : ou bien $t = t'$, $a = 0$, $b = 0$; ou bien $t = 1$, $t' = 0$, auquel cas $a = \alpha$, $b = \beta$. *Si α et β sont nuls, la représentation c de* C *est une courbe fermée sans point multiple.* Il n'y a pas de vecteur à projections entières ayant ses extrémités sur c et deux représentations différentes de C ne se coupent pas.

Si l'un au moins des nombres α, β n'est pas nul, c est une courbe ouverte sans point multiple. Le vecteur qui joint ses extrémités est le seul vecteur de projections entières (d'ailleurs égales à α et β) dont les extrémités sont sur c. Ces deux extrémités appartiennent

chacune à une autre représentation de C et il n'y a que ces deux points de c qui appartiennent à d'autres représentations.

Quand la courbe C est fermée, les nombres α, β représentent en grandeur et en signe les *coefficients d'enlacement de* C *avec l'axe de* T *et le lieu des centres des méridiens de* T. Par coefficient d'enlacement avec l'axe du tore, j'entends le coefficient d'enlacement avec une courbe formée par une demi-circonférence concentrique du tore, de rayon supérieur à $R + r$, dont le diamètre est porté par l'axe du tore, et le diamètre de cette demi-circonférence. Elle est supposée orientée de façon qu'en la décrivant dans le sens positif, la cote aille en croissant sur la partie rectiligne. Le lieu des centres des méridiens est orienté suivant le sens positif du plan des xy. Nous supposons C orientée dans le sens des t croissants.

On pourrait démontrer dès maintenant ces propriétés des nombres α, β ; je les établirai plus tard pour chaque cas.

41. Courbes ouvertes. — Soit C une courbe de Jordan ouverte sans point multiple tracée sur T. Les diverses représentations c, c', ... de C sur le plan H sont des arcs sans point multiple et sans point commun. Chacun d'eux a un écart non nul avec les autres. Soit ε un nombre inférieur à cet écart (le fait qu'il y a une infinité de représentations n'empêche pas de déterminer ε parce qu'il n'y en a qu'un nombre fini dans une région bornée). Enfermons une représentation particulière c dans une chaîne régulière ouverte g dont chaque chaînon a un diamètre inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$. Je dis que g représente de façon biunivoque et continue une région de T. Supposons en effet (n° **39**) qu'il y ait un vecteur pp' de projections entières ayant ses deux extrémités dans g. Il existe deux points mm' de c tels que $mp < \frac{1}{2}\varepsilon$, $m'p' < \frac{1}{2}\varepsilon$ (n° **19**). Soit m_1 un point tel que $(mm_1) = (pp')$. m_1 représente le même point que m et se trouve alors sur une autre représentation c' de C. Mais on a $m_1p' = mp$, donc $< \frac{1}{2}\varepsilon$ et par suite $m'm_1 < \varepsilon$. Ceci est impossible puisque ε est inférieur à l'écart de c et c'.

Traçons dans g un segment de droite c_1 parallèle à l'axe $o\omega$.

Il représente un arc de parallèle C_1 de T. On peut passer de c à c_1 par une déformation continue de la région g n'altérant pas la frontière (nº **26**). g étant homéomorphe à une région G de T, on peut passer de C à C_1 par une déformation continue de T en lui-même. Le tore T satisfaisant aux conditions du nº **36**, on peut passer de la courbe C à la courbe plane C_1 par une déformation continue de l'espace n'altérant qu'une région bornée.

Les courbes ouvertes tracées sur le tore peuvent donc être ajoutées à celles qui figurent dans l'énoncé du nº **33**.

42. Courbes fermées dont la représentation est fermée. — Soit C une telle courbe ($\alpha = \beta = 0$). Considérons une représentation particulière c de C et soit ε un nombre inférieur à l'écart de c avec les autres représentations de C. Enfermons c dans une chaîne régulière fermée g dont chaque chaînon a un diamètre inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$. Soient l, l' les deux contours de cette chaîne (l' intérieur à l). Je dis que l'intérieur s de l représente de façon biunivoque et continue une région S de T. Il me suffit de prouver qu'il n'existe pas de vecteur à projections entières dont les extrémités appartiennent à s.

Supposons qu'il existe un tel vecteur pp'. Déplaçons-le sur la droite qui le porte jusqu'à ce qu'une de ses extrémités p vienne sur l; l'autre extrémité p' appartient encore à s. Elle ne peut pas appartenir à g, car le raisonnement du numéro précédent s'appliquerait encore à la chaîne g et par suite il n'y a pas de vecteur à projections entières ayant ses extrémités dans g. Ainsi p' est intérieur à l', donc à c. Soient m un point de c tel que $mp < \frac{1}{2}\varepsilon$ et m' le point tel que $(mp) = (m'p')$. mm' est un vecteur à projections entières, donc m' appartient à une représentation c' de C différente de c. m' ne peut pas être dans g, car il aurait un écart inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$ avec c; m' ne peut pas être extérieur à l, car le vecteur $m'p'$ ayant ses extrémités dans deux régions différentes de c couperait c en un point m'' et l'on aurait $m'm'' < m'p'$, donc encore $< \frac{1}{2}\varepsilon$. Donc m' est intérieur à l'. La courbe c' qui con-

tient m' a donc ce point à l'intérieur de c. Elle se déduit de c par la translation (mm') : elle a donc des points à l'extérieur de c, par exemple le point qui se déduit par la translation (mm') du dernier point de rencontre avec c de la demi-droite mm'. Donc c' coupe c, ce qui est impossible. La propriété est établie.

Soient m un point de l'intérieur de l et M le point de T qu'il représente. Traçons de M comme centre une sphère de rayon assez petit pour qu'elle coupe T suivant une courbe C_1 sans point multiple et dont tous les points appartiennent à la région S de T homéomorphe de l'intérieur s de l. C_1 est représentée par une courbe c_1 intérieure à l; c_1 est fermée et sans point multiple. On peut passer de c à c_1 par déformation homéomorphe de s sans altérer l, donc on peut passer de C à la courbe sphérique C_1 par déformation homéomorphe de T sur lui-même et par suite de C à C_1 par déformation homéomorphe de l'espace n'altérant qu'une région bornée.

Les courbes fermées C *tracées sur un tore et pour lesquelles* $\alpha = \beta = 0$ *peuvent donc encore être ajoutées à celles de l'énoncé du n° 33.*

α et β sont bien les coefficients d'enlacement de C avec l'axe du tore et le lieu des centres des méridiens, car c peut se réduire à o à l'intérieur de l, donc C peut se réduire à o sur T, c'est-à-dire sans couper ni l'axe, ni le lieu des centres des méridiens.

45. Courbes fermées dont la représentation est ouverte. — Nous supposons maintenant que l'un au moins des deux nombres α, β n'est pas nul. Les représentations de C sont des courbes ouvertes. Soit c l'une d'elles d'extrémités m_0, m_1, ayant respectivement pour coordonnées ω_0, φ_0 : ω_1, φ_1. Le vecteur m_0m_1 est le seul vecteur à projections entières dont les extrémités soient sur c; ses projections sont d'ailleurs α, β.

Supposons que nous fassions une déformation homéomorphe de T en lui-même. ω_0, ω_1, φ_0, φ_1 varient de façon continue; donc $\omega_1 - \omega_0$, $\varphi_1 - \varphi_0$ varient de façon continue et par suite restent fixes et égaux à α, β. Au cours d'une telle déformation, c restera donc une courbe ayant la même propriété que c : le vecteur joignant ses extrémités est le seul vecteur à projections entières dont les extrémités sont sur c et ce vecteur a pour projections α, β. Nous allons

envisager dans la suite un certain nombre de telles déformations que nous définirons chacune par la déformation d'une portion du plan H représentant de façon biunivoque et continue une région de T. Nous arriverons finalement à amener c à être un segment de droite, qui aura alors pour projections α, β et aucune portion de ce segment de droite n'aura ses deux projections entières.

44. Traçons, ce qui est possible, deux chemins reliant m_0 et m_1 et constituant une courbe fermée γ contenant c à son intérieur, les points m_0 et m_1 étant les deux seuls points de c situés sur γ. De plus, γ devra être telle qu'elle ne contienne que le segment $m_0 m_1$ qui ait ses deux projections entières. Sauf en ce qui concerne m_0 et m_1, l'intérieur de γ est une image univoque et continue d'une région du tore.

Traçons une ligne polygonale c_1 joignant m_0 et m_1, intérieure à γ et n'ayant que m_0 et m_1 pour points limites de ses sommets. On peut (n° **27**) déformer c en c_1 en n'altérant que l'intérieur de γ.

Soit m_0 un point de c_1 autre que m_0 et m_1 et prolongeons c_1 au delà de m_1 en effectuant sur l'arc $m_0 m'_0$ de c_1 la translation $m_0 m_1$. La courbe c' ainsi obtenue, $m'_0 m'_1$ est analogue à c, seulement elle est polygonale et n'a un nombre infini de côtés qu'au voisinage du point m_1. Si donc on opère sur c' comme sur c, on pourra prendre un contour γ' formé d'un nombre fini de segments et une ligne c_1 polygonale d'un nombre fini de côtés.

Or les opérations qui nous ont ainsi fait passer de c à c_1 sont les images de déformations continues n'intéressant que le voisinage de C. Par de telles déformations, on peut donc amener c à être formé d'un nombre fini de segments. J'appelle encore c la ligne ainsi obtenue.

45. La ligne c ayant un nombre fini de sommets, nous pouvons supposer, quitte à faire une déformation représentée par un accroissement de ω et de ζ, que les sommets de cette ligne n'ont aucune de leurs coordonnées entières. c est alors découpé par les côtés du quadrillage de H en tronçons. Les extrémités de ces tronçons appartiennent chacune à un seul côté de c et ce côté traverse en

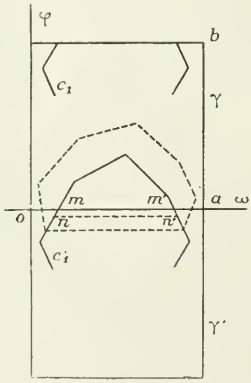
ce point le côté du quadrillage. Je supposerai encore, ce qui est également légitime, qu'aucun sommet du quadrillage n'est sur c.

Considérons le carré γ du quadrillage qui a pour côtés les segments (o, 1) de $o\,\omega$ et $o\,\zeta$, soit $oabc$ son contour. Faisons subir à chaque tronçon de c la translation qui l'amène dans γ. Nous avons une nouvelle représentation c_1 de C. c_1 est formé de tronçons allant d'un côté de γ à un autre côté. Leurs extrémités en nombre fini se correspondent deux à deux : sur oa et cb par abscisses égales; sur ab et oc par ordonnées égales. Il n'y a pas d'extrémité aux sommets o, a, b, c de γ.

Les tronçons de c_1 sont de trois sortes :

Première catégorie. — Tronçons dont les extrémités sont sur un même côté de γ. Soit mm' un tronçon de cette nature dont les extrémités sont sur oa, par exemple. S'il y a d'autres extrémités

Fig. 9.

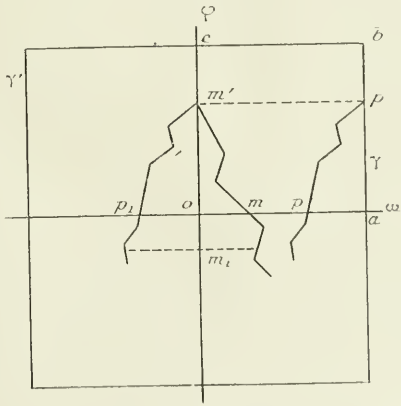


de tronçons entre m et m', ils ne peuvent être que de cette nature, puisque c_1 est sans point multiple. Il y en a alors un, mm', tel que l'arc mm' et le segment mm' déterminent une région ne contenant pas de points de c_1. Cette région est homéomorphe à une portion P de T (*fig.* 9).

Par une déformation n'intéressant qu'une portion de T contenant P et différant aussi peu de P que nous le voudrons, nous pouvons remplacer C par une courbe telle que la partie $n\,m\,m'\,n'$ de c_1, n et n' étant très voisins de m et m', devienne le segment nn'. Par cette opération répétée nous supprimerons tous les tronçons de c_1 qui sont de première catégorie.

Deuxième catégorie. — Les tronçons dont les extrémités sont sur deux côtés de γ comprenant un angle de γ. Je dirai qu'un tel tronçon est *relatif à cet angle*. S'il existe un tronçon relatif à l'angle o il en existera un relatif à cet angle, soit mm', tel qu'entre o et m et entre o et m', il n'y ait pas d'autres extrémités de tronçons. Supposons alors qu'il existe des tronçons relatifs aux angles consécutifs o et a et soient mm', pp' ceux de ces tronçons tels que mm' et pp' sont les extrémités de tronçons les plus rapprochées de o ou a.

Fig. 10.



On a alors $om' = ap'$ (*fig.* 10). Envisageons le carré γ' contigu à γ le long de oc et dans ce carré le tronçon $m'p_1$ homologue de pp'. On peut comme tout à l'heure remplacer un arc un peu supérieur à $p_1 m' m$ par un arc sans points dans γ et γ' et coupant en un seul

point m_1 le prolongement de co. Dans cette opération nous faisons disparaître les quatre extrémités m, m', p, p' et nous faisons apparaître les deux extrémités homologues de m_1, donc nous diminuons le nombre des extrémités de tronçons. Il peut d'ailleurs réapparaître des tronçons de la première catégorie que nous ferons aussitôt disparaître comme il a été dit plus haut et cela ne peut que diminuer encore le nombre des tronçons.

Nous pourrons répéter une telle opération tant qu'il restera des tronçons relatifs à deux angles consécutifs. Comme nous diminuons chaque fois le nombre des tronçons, nous arriverons à ne plus en avoir de cette sorte, le nombre total des tronçons étant fini.

Les tronçons de deuxième catégorie qui restent sont alors nécessairement relatifs à deux angles opposés, supposons, pour fixer les idées, qu'ils soient relatifs aux angles a et c.

Troisième catégorie. — Les tronçons dont les extrémités sont sur deux côtés opposés de γ. S'il y a de tels tronçons allant de oa à bc, il ne pourra pas y en avoir qui aillent de ab à oc. Supposons par exemple que nous soyons dans ce cas.

Supposons qu'il y ait r extrémités de tronçons sur ab et oc et s sur oa et bc. Parcourons à partir de a les deux chemins abc et aoc, et numérotons sur chacun de ces chemins les extrémités de tronçons dans l'ordre où nous les rencontrons. Les extrémités d'un même tronçon portent le même numéro, car les tronçons ne se coupent pas et chacun d'eux passe entre a et c.

Enfermons un segment un peu inférieur à ab dans un rectangle homéomorphe à une portion de T et déformons l'intérieur de ce rectangle de façon que les extrémités de tronçons sur ab viennent aux milieux des segments obtenus en coupant ab en r parties égales. Faisons une déformation analogue relativement à oa. Ceci fait, nous pouvons par des déformations successives du type envisagé, faire en sorte que les tronçons deviennent des segments de droite joignant les extrémités que nous venons de déterminer. Ces segments sont alors parallèles et par suite *c est un segment de droite.*

Nous pouvons enfin faire une dernière déformation amenant l'extrémité initiale de c au point o (accroissement fixe de toutes les

valeurs de ω et accroissement fixe de toutes les valeurs de φ). Soit c' le segment ainsi obtenu et soit C' la courbe de T qu'il représente.

46. D'après la remarque de la fin du n° **45**, c' a pour projections $\alpha\beta$, les coordonnées de son extrémité sont α, β. Il en résulte que c' et par suite C' a pour équations

$$(3)\quad (C') \qquad \omega = \alpha t, \qquad \varphi = \beta t \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

On passe de C à C' par déformation continue sur T, donc C a les mêmes coefficients d'enlacement que C' avec l'axe et le lieu des centres des méridiens. Calculons par exemple ce dernier. Le cercle limité par le lieu des centres des méridiens coupe T suivant la circonférence $\varphi = \frac{1}{2} +$ entier. On aura un point de traversée positive chaque fois que c' coupera une droite $\varphi = \frac{1}{2} +$ entier, la coordonnée φ allant en croissant sur c'. La somme de ces traversées est manifestement β; ce nombre est donc le *coefficient d'enlacement* de C avec le lieu des centres des méridiens. On trouve de même que α est le coefficient d'enlacement de C avec l'axe de T.

Nous avons également remarqué qu'aucune portion de c' n'avait ses deux projections entières. Il en résulte que si aucun des nombres α, β n'est nul, *ces deux nombres sont premiers entre eux*. Si β par exemple est nul, c' est porté par l'axe $o\omega$ et la même remarque montre que $\alpha = \pm 1$. De même si $\alpha = 0$, $\beta = \pm 1$ [1].

Si l'un au moins des nombres α, β n'est pas nul, C est enlacée soit avec l'axe, soit avec le lieu des centres des méridiens. Elle ne peut donc pas se réduire à o sans couper une de ces courbes, c'est-à-dire sans quitter T. Je dis de plus que C ne partage pas T en régions. Il suffit de le prouver pour C'. Les représentations de C' forment des droites parallèles qui découpent β segments égaux

---

[1] Si une courbe fermée C a des points multiples, les accroissements α, β de ω et φ, quand on la décrit complètement, sont encore ses coefficients d'enlacement avec l'axe et le lieu des centres des méridiens; mais ces nombres ne sont plus nécessairement premiers entre eux.

sur oa et α sur oc. Soient m_1, m_2 les points de γ qui représentent deux points donnés M_1, M_2 de T, non sur C'. Menons par m_1 m_2 des demi-droites parallèles à oz et soient p_1, p_2 les premiers points de rencontre avec les représentations de C'; p_1 sera sur une certaine représentation c'_1 et p_2 sur c'_2. Soit p'_2 le point de c'_1 homologue de p_2 et construisons le vecteur $p'_2 m'_2$ équipollent à $p_2 m_2$. Le segment de droite $m_1 m'_2$ représente une courbe qui, sur T, joint $M_1 M_2$ sans couper C'. Ces points étant quelconques, C' ne partage pas T en régions.

47. Je vais maintenant établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient* C *une courbe de Jordan fermée sans point multiple tracée sur un tore et* α, β *ses coefficients d'enlacement avec l'axe et le lieu des centres des méridiens. Pour que la correspondance entre* C *et une circonférence puisse s'étendre à tout l'espace, il faut et il suffit que l'un des nombres* α, β *soit égal à* 0, *à* $+1$ *ou à* -1. *Quand cette extension est possible, on peut passer de* C *à la circonférence par une déformation homéomorphe de l'espace n'altérant qu'une région bornée.*

48. Montrons d'abord que ces conditions sont suffisantes. Ceci est déjà fait pour le cas $\alpha = \beta = 0$ (n° **42**). Supposons que l'un au moins des nombres α, β ne soit pas nul, et raisonnons sur la courbe C' définie par les équations (3). Si α ou β est nul, C' est un méridien ou un parallèle de T, donc une circonférence et la proposition est évidente. Il ne reste donc à étudier que le cas $\alpha\beta \neq 0$.

Soit d'abord $\alpha = \pm 1$. Un demi-plan quelconque mené par l'axe du tore coupe C' en un seul point. En effet, ce demi-plan coupe T suivant le méridien $\omega = \omega_0$ et les points de C' sur ce méridien ont pour paramètres les racines de l'équation $w_0 + k = \alpha t$, k étant un entier quelconque. Mais comme $\alpha = \pm 1$ et que t est compris entre 0 et 1, cette équation a une racine t et une seule. La projection C'_1 de C' sur le plan des xy est donc sans point multiple. Soit S le cylindre projetant C' sur le plan des xy, limité à deux courbes L, L' de cotes $+r$ et $-r$. Nous pouvons passer de C' à C_1 par une déformation homéomorphe de S n'altérant pas les

frontières L, L', qu'on définirait comme celles considérées précédemment, nos **25**, **27**.

Comme S vérifie manifestement les conditions du théorème du no **36**, on peut passer de C' à la courbe plane C_1 (donc aussi à une circonférence) par une déformation de l'espace n'altérant qu'une région bornée.

Reste le cas $\beta = \pm 1$. Mais il n'y a, en réalité, aucune différence essentielle entre α et β: une inversion dont le pôle est sur le lieu des centres des méridiens de T, transforme T en un tore T', les méridiens de T en les parallèles de T' et inversement, donc elle transforme C en une courbe C' pour laquelle $\alpha' = \beta$, $\beta' = \alpha$.

Les conditions sont donc bien suffisantes.

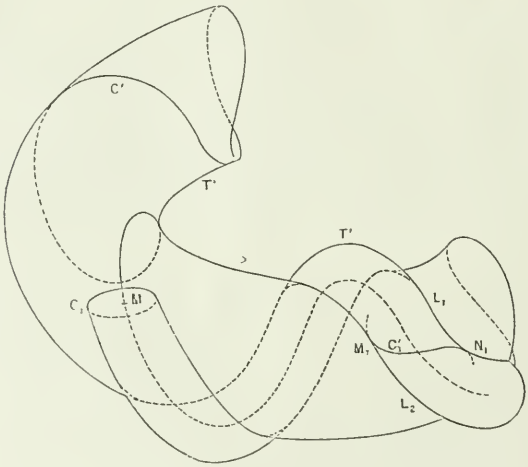
49. Pour montrer que les conditions sont nécessaires, supposons que la correspondance entre C et une circonférence puisse s'étendre à tout l'espace. Il en est alors de même de la correspondance entre C' et la circonférence. Au cercle limité par la circonférence, correspond une calotte simplement connexe sans point multiple Σ ayant C' pour frontière. *Nous allons montrer que s'il existe une telle calotte* Σ *et si aucun des nombres* α, β *n'est nul, l'un d'eux est, en valeur absolue, égal à* 1.

Considérons une *surface auxiliaire* T', enveloppe d'une sphère de rayon constant ρ dont le centre décrit C'. Nous prendrons ρ assez petit pour que T' soit sans point multiple. Alors T' est le lieu d'une circonférence G dont le centre décrit C', qui a ρ pour rayon, et dont le plan est normal à C'; par chaque point de T' il passe une circonférence C et une seule. G, étant petite, coupe T en deux points M_1, M_2 qui décrivent deux courbes L_1, L_2. Si le point M décrit C' dans le sens positif, M_1 et M_2 décriront L_1, L_2 dans des sens que je prendrai pour sens positifs de ces courbes. Les trois courbes C', L_1, L_2 étant ainsi orientées, je dis qu'elles ont deux à deux un *coefficient d'enlacement égal à* $\alpha\beta$, donc différant de 0 dans les hypothèses où nous nous sommes placés.

Envisageons une représentation de T sur le plan II. Soient c' un vecteur de projections α, β représentant C', et m la représentation sur c' d'un point M de C'. L'arc M_1MM_2 suivant lequel le cercle

limité par G coupe T est représenté par un arc $m_1\, mm_2$. Nous supposerons ρ assez petit pour que mm_1, mm_2 soient toujours inférieurs à $\frac{1}{2}$. Soient l_1, l_2 les lieux de m_1, m_2, quand M décrit C'. Les projections de l_1, l_2 sont entières puisque L_1, L_2 sont des courbes fermées. Mais comme les extrémités correspondantes de l_1 et de c' sont distantes de moins de $\frac{1}{2}$, les projections de l_1 sont égales à α et β, de même pour l_2. Donc les coefficients d'enlacement de L_1 et de L_2 avec l'axe et avec le lieu des centres de méridiens de T sont α et β.

Fig. 11.



Déformons C' intérieurement à T (donc sans couper L_1 et L_2) chaque point de C' décrivant un rayon de méridien. Nous amènerons ainsi C' sur le lieu des centres des méridiens, α point de C' venant en un même point de cette courbe. D'ailleurs C' étant enlacé α fois avec l'axe du tore, nous pouvons dire que nous amenons C' sur α fois la circonférence lieu des centres des méridiens. L_1 est enlacé β fois avec cette circonférence, donc $\alpha\beta$ fois

avec C'. Nous aurions pu également par une déformation extérieure à T amener C' sur β fois une circonférence concentrique à un méridien est un peu plus grande. Le résultat est le même. On a le même résultat pour les coefficients d'enlacement de C' avec L_2 et de L_1 avec L_2.

Fixons un système de coordonnées ω', φ' sur T'. Soit M' un point de T'. Il est sur une circonférence G de centre M. Le point M est déterminé sur C' par une valeur du paramètre t, entre 0 et 1 [équations (2)]. Nous prendrons ω' égal à t à un entier près. Orientons la circonférence G, par exemple dans le sens qui va de M_1 à M_2 extérieurement à T. Nous prendrons pour φ' le rapport d'une détermination quelconque de l'arc $M_1 M'$ à la longueur de G. φ' est déterminé à un entier près. La courbe L_1 a pour équation $\varphi' = 0$ à un entier près. Les courbes G ont pour équations $\omega' =$ constante.

Si nous considérons une courbe fermée tracée sur T', nous pouvons lui faire correspondre deux nombres α', β' qui seront les accroissements respectifs de ω' et de φ' quand on décrit la courbe. Pour les courbes L_1 et L_2, $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$: pour les circonférences G, $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$.

Nous pouvons faire la représentation de T' *sur un plan* Π' comme nous avons fait la représentation de T sur un plan Π. Au point M' de paramètres ω', φ', nous ferons correspondre le point m' de coordonnées ω', φ'. *Cette représentation aura des propriétés tout à fait analogues à celles de la représentation du tore.*

50. Je vais montrer que, si Σ existe, il existe sur T' une courbe C_1 ne coupant pas Σ et pour laquelle β' n'est pas nul.

Σ étant une calotte simplement connexe sans point multiple peut se représenter sur un cercle σ limité par une circonférence c'. L'ensemble des points communs à Σ et T' se représente alors suivant un ensemble fermé ayant un écart non nul avec c'. Je peux donc tracer une circonférence c'' concentrique à c' et telle que dans l'anneau compris entre ces deux circonférences il n'y ait pas de points représentant des points communs à Σ et T'. Soient C'' l'homologue de c'' et Σ' la calotte simplement connexe sans point multiple correspondant à l'intérieur de c'. Σ' a C'' pour frontière et

l'on peut passer de C' à C'' sans couper T' puisqu'on peut passer de c' à c'' sur l'anneau que forment ces deux courbes. C'' *est donc enlacée comme* C' *avec toute courbe tracée sur* T'.

Σ' n'ayant pas de points sur C', nous pouvons enfermer Σ' dans un domaine polyédral D non enlacé avec C' (n° **55**). Soient D' l'ensemble des points de D sur T' et l_1, l_2, ... les frontières de D'. *La courbe* C_1 *que je cherche est une des courbes* l.

Tout d'abord, les courbes l existent, c'est-à-dire qu'il y a sur T' des points de D et des points n'appartenant pas à D. Si tout T' n'appartenait pas à D, une circonférence G étant extérieure à D ne couperait pas Σ' et par suite ne serait pas enlacée avec C'', ce qui n'a pas lieu, puisque G est enlacée avec C'. Si tout T' appartenait à D, la circonférence G étant intérieure à D ne serait pas enlacée avec C', ce qui n'a pas lieu. Donc les lignes l existent. Remarquons en outre que le domaine D est formé de cubes d'un pavage de l'espace et que ces cubes satisfont à la seule condition d'avoir un diamètre inférieur à un nombre déterminé ε et de toucher Σ'. Nous pouvons donc choisir le pavage de façon qu'aucune face ni aucune arête ne soit tangente à T' et qu'aucun sommet ne soit sur T'. Dans ces conditions, les courbes l seront en nombre fini, sans point commun et sans point multiple.

Les courbes l appartenant à la frontière de D', donc de D, aucune d'elles ne touche Σ', ni Σ, puisque Σ est la somme de Σ' et d'une portion intérieure à T'. Il suffit donc de prouver que, parmi les courbes l, il y en a au moins une pour laquelle $\beta' = 0$. Ce sera la courbe C_1 cherchée.

Si pour toutes les courbes l on avait $\beta' = 0$, on aurait pour ces courbes $\alpha' = 0$, $+1$, ou -1. On ne peut pas avoir, pour une courbe l, $\alpha' = +1$, car cette courbe pourrait se ramener sur T' à la courbe L_1 et, par suite, cette courbe l serait comme L_1 enlacée avec C', ce qui n'a pas lieu, l appartenant à D.

Supposons alors que pour toutes les courbes l on ait $\alpha' = \beta' = 0$.

Les représentations i des courbes l sur H' sont alors des courbes fermées sans point multiple et sans point commun; il y a donc une région Δ d'un seul tenant extérieure à toutes ces courbes et l'axe $o'\,\eta'$ a des points dans cette région, car il ne peut être tout

entier intérieur à une seule courbe i. Soient a un point de cet axe appartenant à Δ et b le point dont l'ordonnée est égale à celle de a augmentée de 1, b représentant le même point que a est aussi dans Δ. ab représente une circonférence G. Traçons dans Δ un arc γ allant de a à b. Il représente une courbe fermée Γ, tracée sur T' et pouvant avoir des points multiples. Mais γ peut se ramener sur H' au segment ab, a et b ne bougeant pas, donc Γ peut se ramener sur T' à une circonférence G, Γ est donc enlacée avec C' et C''. Nous arrivons à une contradiction par la remarque suivante : si Δ appartient à D (c'est-à-dire représente des points appartenant tous à D), Γ appartient à D, donc n'est pas enlacée avec C', ce qui n'a pas lieu ; si Δ n'appartient pas à D, Γ ne coupe pas Σ', ce qui est encore impossible puisque cette courbe est enlacée avec C''.

Il est donc nécessaire que, pour une au moins des courbes I, β' *ne soit pas nul.* Soit C_1 cette courbe et soient α', β' les accroissements de ω' et de φ' quand on la décrit.

Considérons maintenant la courbe C_1 tracée sur T' et qui a pour équations paramétriques

$$(1) \quad (C_1) \qquad \omega' = \alpha' t, \qquad \varphi' = \beta' t, \qquad (\beta' \neq 0),$$

α' et β' étant les valeurs qui viennent d'être définies par C_1. On peut passer de C_1 à C_1 par une déformation homéomorphe de T' sur lui-même, donc (n° **36**) par une déformation homéomorphe de l'espace n'altérant qu'une région bornée. Cette région peut d'ailleurs être prise assez voisine de T' pour que C' lui soit extérieure. A la fin de cette déformation, Σ devient une calotte simplement connexe Σ_1 ayant C' pour frontière et qui n'est pas coupée par C_1. Donc :

31. S'il existe une calotte simplement connexe sans point multiple Σ ayant pour frontière C', il en existe aussi une Σ_1 de même frontière et qui n'est pas coupée par une certaine courbe C_1 tracée sur T' et définie par les équations (1) où $\beta' \neq 0$ (*fig.* 11).

β' n'étant pas nul, C_1 coupe effectivement L_1 en β' points que je désigne par $M_1, M_1, \ldots$. Elle coupe aussi L_2 en β' points $M_2, M_2, \ldots$. *Je vais prouver qu'il existe deux points* M_1, M_2 *consé-*

cutifs sur C_1 *et pouvant être joints sur* T *par une courbe ne coupant pas* Σ_1.

Remarquons d'abord que les points M_1, M_1, ... sont des points de traversée de même signe de T par C_1 et que M_2, M_2, ... sont des points de traversée du signe différent du premier. Ceci résulte immédiatement de la considération de la représentation de C'_1 qui est un segment rectiligne et qui coupe les droites $\varphi' =$ entier aux points représentatifs des points M_1, φ' variant toujours dans le même sens quand on passe par un tel point. Nous supposerons par exemple qu'en décrivant C'_1 on passe de l'intérieur de T à l'extérieur aux points M_1, M_1, ... et de l'extérieur à l'intérieur aux points M_2, M_2, ...

C'_1 ne touchant pas Σ_1, enfermons Σ_1 dans un domaine polyédral D non enlacé avec C'_1 et soit D' l'ensemble des points de D situés sur T. Il y a sur T des points de D, par exemple tout C', et des points n'appartenant pas à D, par exemple les points M_1, ... Donc D' a une frontière qui, par suite d'un choix convenable de D (remarque faite au numéro précédent), sera formée d'un nombre fini de courbes I_1, I_2, ... sans point multiple et sans point commun.

Les courbes I appartenant à D, aucune d'elles n'est enlacée avec C'_1. De même les courbes I appartenant à la frontière de D, aucune d'elles ne coupe Σ_1, donc aucune d'elles n'est enlacée avec C'. Soient alors α_1, β_1 les coefficients d'enlacement d'une de ces courbes I_1, avec l'axe et le lieu des centres des méridiens de T. Cette courbe a alors avec C' le coefficient d'enlacement $\alpha\beta_1 = \alpha_1\beta$ (*voir* le raisonnement fait au n° **49** sur les courbes C', I_1, I_2). Nous venons de dire que ce coefficient était nul, et comme α et β ne sont pas nuls, α_1 et β_1 sont nuls. Les courbes *i* représentant les courbes I sur H sont donc des courbes fermées, sans point multiple et sans points communs et chacune d'elles avec son intérieur représente de façon biunivoque et continue une calotte simplement connexe sur T (n° **42**). De plus, il y a dans H une région unique d'un seul tenant extérieure à toutes les courbes *i* et tous les points que représentent les points de cette région appartiennent à D, car les droites indéfinies qui représentent C' ne peuvent être que dans cette région

et C' appartient à D. Or les points $M_1, M_1, \ldots, M_2, M_2, \ldots$ n'appartiennent pas à D : leurs représentations $m_1, \ldots, m_2, \ldots$ sont donc chacune intérieures à une courbe i.

Soit m_1 une représentation particulière de M_1 ; elle est intérieure à une courbe i_1 et, par suite, située dans une région d'un seul tenant s limitée extérieurement par i_1 et éventuellement par des courbes i_2, i_3, ..., intérieures à i_1. Chacune de ces courbes n'est pas enlacée avec C_1 et l'intérieur de chacune d'elles représente de façon biunivoque et continue une région de T. La somme des traversées de T par C_1' à l'intérieur de chacune de ces régions est nulle et, par suite, il y a un nombre égal de points $m_1, m_1, \ldots$ et de points m_2, m_2 à l'intérieur de chacune des courbes $i_1, i_2, i_3, \ldots$. En particulier, il y a au moins un point m_2 dans s. Ce point m_2 peut alors être joint au point m_1 dans s. Ce chemin représente une courbe K_1 allant de M_1 à un certain point M_2 sur T sans couper D', donc sans rencontrer Σ_1.

Si M_1 et M_2 ne sont pas consécutifs sur C_1, soit K_1' l'un des arcs de C_1' ayant pour extrémités M_1, M_2, la courbe $K_1 + K_1'$ ne coupe pas Σ_1. Les points de K_1' au voisinage des extrémités M_1, M_2 sont dans une même région de T. Nous pouvons alors déduire de cette courbe une courbe C_2' ne coupant pas Σ_1 et formée de : 1° la courbe K_1', sauf deux petits arcs au voisinage des points M_1, M_2; 2° une courbe déduite de K_1 par une déformation au cours de laquelle chaque point décrit un rayon de méridien de T, du côté des petits arcs supprimés de K_1' ; 3° deux petits arcs faisant le raccordement. Cette courbe C_2' coupe T en des points qui font partie des points $M_1, M_1, \ldots, M_2, M_2, \ldots$, mais leur nombre est moindre.

Je peux appliquer à la courbe C_2 les raisonnements faits sur C_1 et joindre deux certains points M_1, M_2 par un chemin K_2 tracé sur T et ne coupant pas Σ_1. Si M_1, M_2 ne sont pas consécutifs, j'envisagerai l'arc M_1M_2 de K_1', soit K_2', et je recommencerai sur la courbe $K_2 + K_2'$. Le nombre des points tels que M_1, M_2 allant en diminuant et l'opération pouvant se poursuivre tant qu'on n'a pas obtenu de points consécutifs sur C_1', je finirai par en obtenir.

Appelons M_1, M_2 ces deux points consécutifs, K l'arc qui les joint sur T et K' l'arc de C_1' sur lequel il n'y a pas de points de T en dehors

des extrémités M_1, M_2. La courbe $K + K'$ ne coupant pas Σ_1 n'est pas enlacée avec C'. C'est cette propriété que je vais maintenant utiliser.

32. Considérons une dernière courbe auxiliaire K'' joignant sur T les points M_1 et M_2. Pour préciser K'', je supposerai qu'un point M' décrit K' et qu'à chaque position de M' je fasse correspondre un point M de l'intersection de T par le cercle limité à la circonférence G passant en M'. K'' sera l'arc décrit par M que je suppose se déplacer de façon continue. Je peux supposer en outre que K'' coupe C' en un seul point M_0 et il y aura en ce point, sur T, traversée de C' et K''. On pourra d'ailleurs passer de K' à K'' dans une seule région de T, les points M_1, M_2 ne bougeant pas. La courbe fermée $K + K''$ peut avoir des points multiples, mais cela n'a aucune importance. Soient α_1, β_1 ses coefficients d'enlacement avec l'axe et le lieu des centres des méridiens de T.

Nous distinguerons deux cas suivant que K' est intérieur ou extérieur à T. Supposons d'abord K' intérieur à T. Amenons K' sur K'' par la déformation indiquée ci-dessus. Puis amenons C' intérieurement à T, à coïncider avec $|\alpha|$ fois le lieu des centres des méridiens. Le coefficient d'enlacement de cette nouvelle position de C' avec $K + K''$ est en valeur absolue $|\alpha\beta_1|$. D'autre part, C' et $K + K'$ n'étaient pas enlacées. Mais les déformations faites sont en réalité des déformations de ces courbes, au cours desquelles il y a une traversée (et une seule) en M_0. Le coefficient d'enlacement a donc augmenté d'une unité en valeur absolue. Donc $|\alpha\beta_1| = 1$. Ceci exige $|\alpha| = 1$.

Un raisonnement analogue montre que, si K' est extérieur à T, on a $|\beta| = 1$.

Donc, si la correspondance entre C et une circonférence peut s'étendre à tout l'espace, et si aucun des nombres $\alpha\beta$ n'est nul, l'un de ces nombres est égal à $+1$ ou à -1. C.Q.F.D.

33. Il résulte de ceci que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe C tracée sur un tore soit *frontière d'une calotte*

simplement connexe sans point multiple est que l'un des nombres α, β soit égal à 0, à $+1$ ou à -1.

Nous venons de prouver que cette condition était nécessaire pour C'. Elle est également nécessaire pour C, puisque la correspondance entre C et C' s'étend à tout l'espace. Elle est suffisante, car, dans ce cas, la correspondance entre C et une circonférence s'étend à tout l'espace, la calotte sera l'homologue du cercle limité par la circonférence.

Remarquons enfin que si la correspondance entre C et une circonférence ne peut pas s'étendre à tout l'espace, elle s'étend néanmoins aux voisinages de ces courbes. Il en est en effet ainsi pour C' et une circonférence : elle s'étend à l'intérieur de T' d'une part et d'autre part à l'intérieur d'un tore dont la circonférence serait le lieu des centres des méridiens.

IV. — Exemple de deux arcs homéomorphes seulement en eux-mêmes.

34. L'étude qui vient d'être faite des courbes tracées sur le tore T va nous permettre de construire un arc Γ dont la correspondance avec un segment de droite γ ne peut s'étendre à aucun voisinage.

Considérons sur T la courbe C' définie par les équations (3) du n° **46**, $\omega = \alpha t$, $\varphi = \beta t$, où t varie de 0 à 1 et où nous supposerons α et β supérieurs à 1 et premiers entre eux. Sur C', marquons deux points A, B de paramètres respectivement assez voisins de 0 et 1 pour que l'un des deux arcs AB de C', soit V, ne coupe pas les deux parallèles $\varphi = \frac{1}{4}$, $\varphi = -\frac{1}{4}$ de T. Ces parallèles limitent chacun un cercle. Ajoutons à ces cercles les points de T pour lesquels on a $-\frac{1}{4} < \varphi < \frac{1}{4}$. Nous constituons ainsi *une surface simplement connexe sans point multiple* Q que j'utiliserai dans un instant.

J'appelle V' le second arc AB de C'.

Marquons sur l'axe des z un point P de cote supérieure à $3r$. Prenons les homothétiques de C', A, B, V, V', Q par rapport à P

dans le rapport $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, n étant entier positif, et désignons ces homothétiques par la lettre correspondante affectée de l'indice n. Le choix du point P est tel que les surfaces Q_n sont extérieures les unes aux autres. Joignons BA_1 extérieurement à ces surfaces, et prenons encore les homothétiques de cette ligne. *La courbe cherchée* Γ *est formée de :* 1° les homothétiques de V' quand on donne à n toutes les valeurs entières; 2° les homothétiques de BA_1; 3° un segment PP' de l'axe des z, P' ayant une cote supérieure à celle de P.

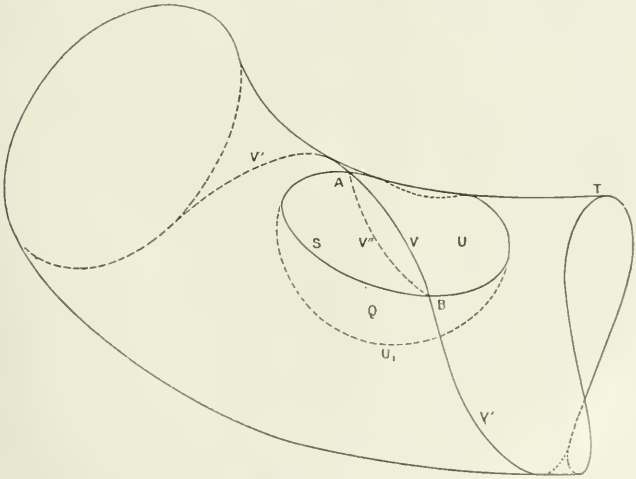
35. Supposons que la correspondance entre Γ et un segment de droite γ puisse s'étendre à leurs voisinages. Soit p l'homologue de P sur γ. Il existe une sphère de centre p et dont tout l'intérieur appartient au voisinage considéré de γ. Dans cette sphère, considérons une courbe c formée d'une demi-circonférence de centre p et de son diamètre porté par γ. Elle limite dans son plan une calotte simplement connexe σ. A c correspond une courbe C frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple Σ, homologue de σ. La courbe C est formée d'un arc, portion de Γ auquel appartient P et d'un arc ayant un écart non nul avec P (homologue de la demi-circonférence), donc extérieur à une certaine sphère de centre P. Mais je peux déterminer n assez grand pour que Q_n soit tout entier intérieur à cette sphère. C comprend donc l'arc V'_n et un arc extérieur à Q_n. Je dis qu'il est impossible qu'une telle courbe soit frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple. En raison des homothéties faites, il me suffit de prouver que *la courbe* C, *somme de* V' *et d'un arc* V'' *extérieur à* Q, *ne peut pas être frontière d'une telle calotte.*

36. Supposons qu'il existe une calotte Σ limitée à C. Faisons une inversion par rapport à un point intérieur à T et non situé sur Σ. T se change en une surface qui lui est homéomorphe, par construction. Mais si l'on fait correspondre aux méridiens les inverses des parallèles et inversement, la correspondance peut s'étendre à tout l'espace, comme on s'en rend compte aisément, car ici il s'agit de surfaces analytiques simples. Supposons cette extension faite. Il

correspond à C′ une courbe analogue, mais pour laquelle les nombres α, β auraient été permutés, ce qui n'a aucune importance ici. A Q correspond une surface simplement connexe intérieure à T, et à V″ une courbe intérieure à la surface correspondant à Q. La nouvelle courbe C serait frontière d'une calotte Σ, la correspondante de celle limitée à l'ancienne courbe C. Remarquons d'ailleurs que nous pouvons supposer que les arcs de V″ voisins de A et B sont analytiques, et alors, par une déformation de l'espace, n'altérant que l'intérieur de Q, nous pouvons amener V″ à être intérieur à T et à la sphère de diamètre AB. Je peux enfin supposer A, B assez voisins pour que cette sphère soit intérieure à la surface T′ définie au n° **49**.

La figure obtenue est donc la suivante : la sphère de diamètre AB

Fig. 12.



est intérieure à T′. Elle découpe dans T une calotte U limitée par une courbe S et soit U_1 la portion de cette sphère intérieure à T. C est une courbe formée de V′ et d'un arc V″ allant de A à B intérieurement à la surface $Q = U + U_1$. Il s'agit de prouver que C

ne peut pas être frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple (*fig.* 12).

37. Supposons qu'il existe une calotte Σ ayant C pour frontière. Comme Q est intérieure à T′, les raisonnements faits au n° **50** sur C′, T′ et Σ s'appliquent ici à C, T′ et Σ. Il existe alors une calotte Σ_1 de frontière C qui n'est pas coupée par une courbe C'_1 de T′ qui a pour équations $\omega' = \alpha t$, $\zeta' = \beta' t$ ($\beta' \neq 0$).

Enfermons Σ_1 dans un domaine polygonal D non enlacé avec C_1 et de façon que l'intersection de D avec T (et aussi avec la surface qui s'en déduit en remplaçant U par U_1) soit constituée par un nombre fini de courbes I sans point multiple et sans point commun. Nous supposerons encore que, si une courbe I rencontre S, elle traverse S en ce point de rencontre. Les tronçons des courbes I intérieurs à U se répartissent *en deux catégories :* la première est formée des tronçons dont les deux extrémités sont sur le même arc AB de S; la seconde est formée des tronçons ayant une extrémité sur chacun de ces arcs.

Considérons d'abord les tronçons de la première catégorie. Un raisonnement, analogue à celui du n° **45**, permet de les faire disparaître, grâce à une déformation de T sur lui-même n'altérant qu'une portion un peu plus grande que U. Cette déformation pourra d'ailleurs faire sortir de U des courbes I totalement intérieures à U. Une telle déformation peut être réalisée par une déformation de l'espace n'altérant que le voisinage de U (n° **36**), donc ne modifiant pas C ni C'_1. Après cette déformation, D devient un nouveau domaine non enlacé avec C_1 et enfermant encore une calotte limitée à C, cette calotte étant ce qu'est devenu Σ_1 après la déformation. Il n'y aura plus de tronçons de première catégorie dans U et le nombre des extrémités de tronçons aura été diminué.

Si, dans U_1, il y a des tronçons de première catégorie, je ferai un raisonnement analogue, en remplaçant U par U_1 et je ferai disparaître ces tronçons, en diminuant toujours le nombre des extrémités sur S. La déformation pourrait peut-être faire réapparaître des tronçons de première catégorie sur U : je recommencerai alors l'opération sur U pour les faire disparaître et ainsi de suite.

J'arriverai finalement à ne plus avoir de tronçons de première catégorie, ni sur U, ni sur U_1, car chacune des opérations diminue le nombre des extrémités sur S et ce nombre est fini. Il ne restera plus que des tronçons de seconde catégorie. Si je décris les deux arcs AB de S à partir de A et que je numérote les extrémités de tronçons au fur et à mesure de leur rencontre, les extrémités ayant le même numéro ne peuvent être extrémités que d'un même tronçon dans U et d'un même tronçon dans U_1. Mais ces deux tronçons, l'un dans U, l'autre dans U_1, forment une courbe enlacée avec C. Ceci est impossible puisque les lignes I appartiennent à la frontière de D et par suite ne coupent pas Σ_1, ceci à tous les stades des déformations faites. *Il n'y a donc plus d'extrémités de tronçons sur* S. S'il y a des points des courbes I à l'intérieur de U, ils sont sur des courbes I totalement intérieures à U. Je peux alors faire une déformation de l'espace, n'altérant qu'une région très voisine de U, de façon que ces courbes ne coupent plus V. V est alors, comme A et B, totalement intérieur à D.

Nous pouvons alors reprendre les raisonnements des n^{os} **51** et **52** en renouvelant, chaque fois que cela sera nécessaire, les déformations indiquées ci-dessus pour le domaine D. Nous en déduirons une courbe telle que K + K′, non enlacée avec C, comprenant une portion K′ appartenant à C_1 et une portion K sur T, extérieure aux divers domaines D, donc ne coupant pas V. Mais V″ étant intérieur à Q, on peut passer de V″ à V, et par suite de C à C′ sans couper K + K′. K + K′ n'est donc pas enlacée avec C′. Le raisonnement s'achève comme au n° **52** et l'on en conclut que $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$, ce qui est contraire aux hypothèses faites.

Donc la correspondance entre Γ et γ ne peut s'étendre à aucun voisinage.

58. La propriété de Γ tient à la forme de cette courbe au voisinage du point P. Appelons alors Γ′ un arc de Γ quelconque, pourvu toutefois qu'il contienne le point P comme point intérieur, au sens strict. Tout arc sans point multiple dont Γ′ fait partie est tel que sa correspondance avec un segment de droite ne peut s'étendre à aucun voisinage. Cet arc ne peut faire partie de la frontière d'une

calotte simplement connexe sans point multiple. De même, la correspondance entre une circonférence et une courbe fermée sans point multiple dont Γ' est un arc ne peut s'étendre à aucun voisinage. Une telle courbe ne peut pas être la frontière d'une calotte simplement connexe sans point multiple.

Je dis, de plus, que Γ' (et par suite toute courbe contenant Γ') *ne peut pas être considérée comme tracée sur une surface sans point multiple.* Il faut entendre dans cet énoncé le mot *surface* avec la restriction faite habituellement en *Analysis situs* : parmi les modes de décomposition de la surface en éléments, il en existe au moins un tel qu'un point donné P de la surface appartienne à un seul élément.

Supposons qu'il existe une surface contenant Γ'. Divisons-la en éléments de façon que P appartienne à un seul élément Σ. P appartenant à Σ seul, il y a un arc de Γ' ayant P comme point intérieur (au sens strict) qui appartient aussi à Σ seul.

Décrivons Γ' dans les deux sens à partir de P jusqu'aux premiers points Q, Q_1 qui appartiennent à un élément autre que Σ et appelons Γ'' l'arc QPQ_1 de Γ'. Considérons un des deux arcs QQ_1 de la frontière de Σ (celui qui ne contient pas P, si P est sur la frontière). Conservons de cet arc la portion $Q'Q'_1$ qui ne touche Γ'' qu'en ses extrémités, Q' étant sur l'arc PQ de Γ'' et Q'_1 sur l'arc PQ^1. La courbe formée de cet arc $Q'Q_1$ de frontière et de l'arc $Q'PQ_1$ de Γ'' limite sur Σ une calotte simplement connexe sans point multiple. Or ceci est impossible, puisque la frontière de cette calotte comprendrait un arc du type de l'arc Γ'.

V. — Correspondance entre les ensembles de courbes.

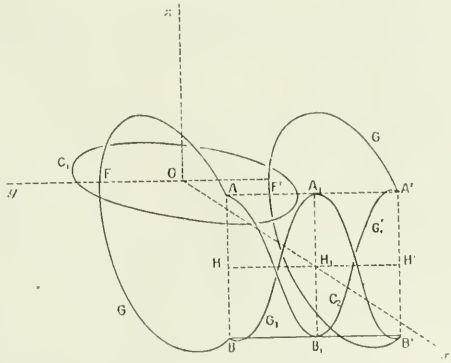
59. Pour terminer cette étude, disons un mot du cas où l'on chercherait à étendre la correspondance entre deux groupes formés chacun de deux courbes, C_1, C_2 d'une part, c_1, c_2 d'autre part, fermées, sans point multiple et sans point commun. Pour que la correspondance entre C_1, C_2 et c_1, c_2 *puisse s'étendre à leurs voisinages*, il faut et il suffit manifestement qu'il en soit ainsi pour la correspondance entre C_1 et c_1 et pour la correspondance entre C_2 et c_2.

Pour qu'elle *puisse s'étendre à tout l'espace*, il faut encore qu'il en soit ainsi pour la correspondance entre C_1 et c_1 et la correspondance entre C_2 et c_2. Mais cette condition n'est plus suffisante. L'extension à tout l'espace ne sera, par exemple, pas possible si le coefficient d'enlacement de C_1 et C_2 n'est pas égal au coefficient d'enlacement de c_1 et c_2. Même si ces coefficients sont égaux, il ne sera pas toujours possible de faire cette extension. Voici un exemple où l'on se trouve dans ce cas.

60. Comme courbes c_1, c_2, prenons deux circonférences d'un même plan, extérieures l'une à l'autre. Comme courbe C_1, prenons une circonférence du plan des xy et de centre l'origine O des coordonnées.

Pour définir C_2, marquons un segment FF′ de milieu O, porté par l'axe Oy et intérieur à C_1. Marquons un segment équipollent HH′ ayant son milieu H_1 sur Ox et extérieur à C_1. Construi-

Fig. 13



sons un rectangle AA′B′B ayant ses côtés AA′, BB′ équipollents à FF′, leurs milieux A_1, B_1 étant dans le plan xOz, et ses côtés AB, A′B′ parallèles à Oz et ayant pour milieux H, H′. Appelons G, G′ les deux arcs de circonférence AFB et A′F′B′. Sur le cylindre de révolution d'axe HH′ et de génératrice AA′ traçons les deux

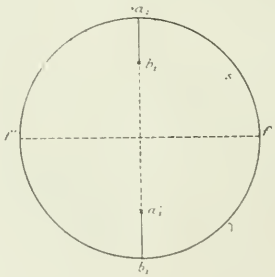
spires d'hélice ne se coupant pas AB_1A' (soit G_1) et BA_1B' (soit G_1). La courbe C_2 est la réunion des quatre arcs G, G', G_1, G_1 (*fig.* 13).

La correspondance entre C_1 et c_1 s'étend à tout l'espace, ainsi que la correspondance entre C_2 et c_2. c_1 et c_2 ne sont pas enlacées. C_1, C_2 ne sont pas non plus enlacées, car C_2 coupe le cercle limité par C_1 aux deux seuls points F, F' où les traversées sont de sens contraires. Je dis que néanmoins la *correspondance entre le groupe* C_1, C_2 *et le groupe* c_1, c_2 *ne peut pas s'étendre à tout l'espace.*

Retenons les trois propriétés suivantes du groupe c_1, c_2. Le cercle limité par c_1 n'est pas coupé par c_2. Le cercle limité par c_2 n'est pas coupé par c_1. Il existe une sphère contenant c_1 à son intérieur et c_2 à son extérieur. En rapprochant ces propriétés des trois théorèmes démontrés ci-après, nous avons trois preuves de l'impossibilité d'étendre la correspondance considérée à tout l'espace.

Pour démontrer ces théorèmes, j'utiliserai une calotte de sur-

Fig. 14.



face S ayant C_2 pour frontière et comprenant : 1° une surface cylindrique de génératrices parallèles à Oy et de bases G et G' ; 2° deux conoïdes droits d'axe A_1B_1 et de directrices respectivement G_1 et G_1. S a une ligne double A_1B_1. On peut représenter S sur l'intérieur s d'une circonférence γ, la ligne double étant représentée par deux segments a_1b_1, a'_1b_1 de part et d'autre du diamètre ff' qui représente la génératrice FF' (*fig.* 14).

61. Théorème I. — *Toute calotte simplement connexe sans point multiple ayant* C_1 *pour frontière coupe* C_2.

Supposons qu'il existe une telle calotte Σ ne coupant pas C_2. Enfermons Σ dans un domaine polyédral D non enlacé avec C_2 (n° **55**). Appelons d l'ensemble des points de s représentant des points de S appartenant à D. Je dis que je peux joindre a_1 et b_1 à l'intérieur de s par un arc (ligne polygonale) ne touchant pas d. S'il en était autrement, il y aurait dans la frontière (analytique) de d une courbe i ayant ces deux points dans des régions différentes. L'intérieur de i représente alors une calotte de S traversée en un seul point par C_2, et C_2 serait enlacée avec la courbe I que représente i. Ceci est impossible, puisque I appartient à D, non enlacé avec C_2'.

Soit alors γ' le chemin joignant $a_1 b_1'$. Considérons la courbe Γ tracée sur S et représentée par : 1° l'arc $b_1 f a_1$ de γ; 2° l'arc γ' décrit de a_1' vers b_1. Cette courbe est fermée et traverse le cercle limité par C_1 en des points sur FF′, la somme algébrique des traversées étant 2. Elle est donc enlacée avec C_1. D'autre part, elle est extérieure à D, donc ne coupe pas Σ. Nous arrivons à une contradiction.

62. Théorème II. — *Toute calotte simplement connexe sans point multiple qui a* C_2 *pour frontière coupe* C_1.

Supposons qu'il existe une telle calotte Σ ne coupant pas C_1. Enfermons-la dans un domaine polyédral D non enlacé avec C_1 et soit d l'ensemble des points de s qui représentent des points de S appartenant à D. a_1' et b_1' appartiennent à d, car ils représentent des points de C_2, donc de D. Je peux joindre $a_1 b_1$ à l'intérieur de s par un chemin γ' appartenant tout entier à d. Sans cela, il y aurait sur S une courbe I appartenant à la frontière de D et qui serait enlacée avec C_2, ce qui est impossible, car une telle courbe ne coupe pas Σ. La courbe Γ envisagée au numéro précédent est enlacée avec C_1. D'autre part, elle est entièrement intérieure à D et ne doit par suite pas être enlacée avec C_1. Nous avons encore une contradiction.

63. Théorème III. — *Soit Σ une surface simplement connexe sans point multiple et sans point commun avec C_1 et C_2. Ces deux courbes sont dans la même région de Σ.*

Enfermons Σ dans un domaine polyédral D non enlacé avec C_1 et C_2 et soit d l'ensemble des points de s qui représentent des points de S appartenant à D. On peut joindre a'_1 b'_1 par un chemin γ' ne touchant pas d. Sans cela il y aurait sur S une courbe I appartenant à D et qui serait enlacée avec C_2, ce qui est impossible. La courbe Γ du n° **61** reste extérieure à D, donc ne coupe pas Σ. D'autre part, elle est enlacée (deux fois) avec C_1. Donc C_1 et Γ sont dans la même région de Σ (n° **54**). Il en est alors de même de C_1 et C_2, puisque Γ emprunte un arc de C_2, l'arc G.

64. Les courbes C_1, C_2 jouissent donc des trois propriétés précédentes, qui appartiennent aussi aux courbes enlacées et qu'on aurait pu être tenté de supposer caractéristiques des courbes enlacées. Nous rencontrerons dans la deuxième Partie, une singularité de même nature, mais plus frappante encore : nous définirons une courbe non fermée qui est coupée par toute calotte simplement connexe sans points multiples ayant pour frontière une certaine circonférence. De plus, l'ensemble des points d'intersection n'est pas dénombrable.

Nous verrons aussi, dans la deuxième Partie, de nouveaux exemples de deux arcs homéomorphes seulement en eux-mêmes, comme ceux définis au n° **54**. Nous définirons aussi deux courbes non fermées dont la correspondance peut s'étendre à leurs voisinages, mais pas à tout l'espace.

SECONDE PARTIE.

LES ENSEMBLES PARFAITS PARTOUT DISCONTINUS BORNÉS.

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ENSEMBLES FERMÉS DISCONTINUS.

65. *Définitions.* — Considérons un ensemble F de points dans l'espace E_n à n dimensions. On dit que l'ensemble est *mal enchaîné entre deux de ses points* M_1, M_2, s'il existe un nombre η non nul, tel qu'il soit impossible de construire une ligne polygonale ayant pour extrémités ces deux points M_1, M_2, dont tous les sommets sont des points de l'ensemble et dont chaque côté ait une longueur inférieure à η. Nous dirons encore, pour abréger, que ce nombre η est tel qu'il est impossible de *cheminer sur l'ensemble, de* M_1 *à* M_2 *par pas tous inférieurs à* η.

Remarquons que si nous avons déterminé une valeur η satisfaisant à ces conditions, tous les nombres inférieurs à cette valeur y satisfont aussi. De plus, η ne peut pas être pris supérieur à la distance $M_1 M_2$. Donc les valeurs possibles pour η ont une borne supérieure ε ayant les propriétés suivantes : Si $\eta < \varepsilon$, on ne peut pas cheminer sur l'ensemble de M_1 à M_2 par pas tous inférieurs à η. Si $\eta > \varepsilon_F$, on peut cheminer sur l'ensemble de M_1 à M_2 par pas tous inférieurs à η. *C'est ce nombre* ε_F *que j'attacherai désormais au couple* M_1, M_2 *si l'ensemble est positif mal enchaîné entre ces deux points.*

Si M_1, M_2; M'_1, M'_2 sont quatre points de l'ensemble et si les distances $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$ sont inférieures à θ, ou bien $\varepsilon_F(M_1, M_2)$ et $\varepsilon_F(M'_1, M'_2)$ sont tous deux inférieurs à θ, ou bien ils sont égaux; car on passe de M_1 à M'_1 et de M_2 à M'_2 par des pas inférieurs à θ. Donc si M'_1 et M'_2 tendent vers M_1 et M_2, $\varepsilon_F(M'_1, M'_2)$ tend vers $\varepsilon_F(M_1, M_2)$. $\varepsilon_F(M_1 M_2)$ est une fonction continue des couples de

points M_1, M_2 de l'ensemble: c'est-à-dire des $2n$ coordonnées de ces points.

Un ensemble est dit *partout discontinu*, s'il est mal enchaîné entre deux quelconques de ses points. Nous dirons aussi pour abréger que l'ensemble est discontinu.

Nous allons étudier ceux de ces ensembles qui sont fermés, et surtout ceux qui sont parfaits et partout discontinus.

66. Théorème. — *Soit* F *un ensemble fermé partout discontinu et soient* S_1, S_2 *deux surfaces sans point multiple (variétés fermées à* $n-1$ *dimensions) dont l'une* S_2 *est intérieure à l'autre. On peut construire une surface polygonale* V, *sans point multiple, ayant un nombre fini de sommets, intérieure à* S_1 *et ayant* S_2 *à son intérieur, et ne contenant aucun point de* F.

Ce théorème généralise un énoncé dû à M. Painlevé [1] : Étant donné un point M d'un ensemble, parfait, partout discontinu et plan, on peut enfermer ce point dans une ligne (analytique, par exemple) ne contenant aucun point de l'ensemble et dont tous les points sont à une distance de M inférieure à un nombre donné.

Pour légitimer notre énoncé, considérons tous les couples M_1, M_2 formés d'un point de F situé sur S_1 et d'un point de F situé sur S_2. Ces points forment deux ensembles fermés discontinus F_1 et F_2 : si, par hasard, l'un de ces ensembles F_1, par exemple, n'existait pas, nous adjoindrions à F un point P de S_1, alors F_1 existerait et se réduirait à P. Les ensembles F_1 et F_2 étant fermés, la fonction $\varepsilon_F(M_1, M_2)$ atteint sa borne inférieure θ_1 pour un couple M_1, M_2 convenablement choisi et par suite θ_1 est différent de zéro.

Adjoignons à F tous les points de S_1 et de S_2 et considérons, pour l'ensemble $\mathcal{F}$ ainsi obtenu, la fonction $\varepsilon_{\mathcal{F}}(M_1, M_2)$, M_1 étant sur S_1 et M_2 sur S_2. Cette fonction atteint encore sa borne inférieure θ. Je dis que θ *est différent de zéro.*

Sans quoi, si petit que soit $\eta > 0$, on pourrait aller d'un point M_1 de S_1 à un point M_2 de S_2 par pas inférieurs à η en ne rencon-

---

[1] *Voir* la Thèse de M. Zoretti (*Journal de Mathématiques*, 6e série, t. I, 1905, p. 9.

trant que des points de $\mathfrak{F}$. Soient m_1 le dernier point de S_1 rencontré, m_2 le premier point de S_2 rencontré, p_1 et p_2 les points rencontrés respectivement, immédiatement après m_1, immédiatement avant m_2. p_1 et p_2 sont des points de F, $\varepsilon_F(p_1, p_2)$ est au plus égal à η. Donnons à η des valeurs décroissant jusqu'à zéro; de cette suite de valeurs de η, on pourra toujours extraire une suite partielle telle que les points p_1 et p_2 correspondants tendent respectivement vers deux positions limites, m_1 et m_2 : ces points limites des points p_1 et p_2 de F appartiennent à F: m_1 est sur S_1, m_2 est sur S_2, car p_1 et p_2 étaient distants de moins de η l'un de S_1, l'autre de S_2. Et puisque $\varepsilon_F(M_1, M_2)$ est une fonction continue, on aurait

$$\varepsilon_F(m_1, m_2) = 0;$$

ce qui est contradictoire, puisqu'on a nécessairement

$$\varepsilon_F(m_1, m_2) - \theta_1 > 0.$$

67. Pavons l'espace à l'aide de cubes égaux de diamètre d, inférieur à $\frac{1}{2}\theta$. Et considérons les domaines formés par ceux de ces cubes qui contiennent, à leur intérieur ou sur leur frontière, un point de $\mathfrak{F}$. Deux points P, Q de $\mathfrak{F}$ situés dans un même domaine sont deux points pour lesquels $\varepsilon_{\mathfrak{F}}(P, Q)$ est au plus égal à $2d < \theta$; donc tous les points de S_2 sont dans un même domaine D qui ne contient aucun point de S_1. Tous les points de D pouvant être joints à S_2 sans sortir de D, donc sans rencontrer S_1, tous ces points sont intérieurs à S_1 et les différentes surfaces polygonales limitant D sont intérieures à S_1. Elles divisent l'espace en régions dont une seule est non bornée et celle-ci est limitée par une seule des surfaces frontières de D, soit V.

V répond à la question, elle est intérieure à S_1, elle contient S_2 à son intérieur, elle ne passe par aucun point de F. Il est vrai que V peut avoir des points singuliers parce que deux cubes peuvent avoir en commun, sur V, un sommet, une arête, ..., une frontière à $n - 2$ dimensions; mais alors, il n'y a pas de points de F sur cette frontière ni dans un certain voisinage de cette frontière et, sans sortir de ce voisinage, on peut modifier V, en augmentant ou diminuant D, de façon à faire disparaître les singularités

68. Théorème. — *Soit un ensemble fermé partout discontinu borné* F *et un nombre* Δ. *On peut enfermer* F *dans un nombre fini de surfaces polygonales, ne touchant pas* F *et dont chacune a un diamètre inférieur à* Δ.

Pavons l'espace à l'aide de cubes égaux et ayant un diamètre inférieur à Δ. Envisageons ceux de ces cubes qui touchent F et soit S_2 la frontière de l'un d'eux. Entourons S_2 par une surface S_1 ayant encore un diamètre inférieur à Δ (une frontière de cube, par exemple). Construisons la variété V intermédiaire entre S_1 et S_2, définie par le théorème précédent. Faisons de même pour chacun des cubes conservés, cubes qui sont en nombre fini puisque F est borné.

Toutes les surfaces ainsi construites, qui se coupent, partagent l'espace en cellules et tout point de F est intérieur à une de ces cellules et une seule. Chacune de ces cellules est d'ailleurs une portion de l'intérieur d'une des surfaces V construites, donc a un diamètre inférieur à Δ.

Considérons une de ces cellules qui contient une portion de F; soient F′ cette portion de F et V′ la frontière de la cellule. V′ a un écart non nul avec F′. Pavons l'espace à l'aide de cubes ayant un diamètre inférieur à cet écart et conservons ceux qui touchent V′. Ils forment un domaine d'un seul tenant auquel F′ est extérieur. Les frontières des régions extérieures à ce domaine et contenant des points de F′ peuvent être rendues sans point multiple et sans point commun, comme il a été fait pour V au numéro précédent. Elles constituent une partie des surfaces cherchées. En faisant la même opération pour chacune des cellules qui contient des points de F, j'aurai toutes les surfaces cherchées.

69. Ce théorème va nous permettre d'attacher à l'ensemble F une infinité dénombrable de surfaces polygonales V telles *que* F *coïncide avec l'ensemble des points qui sont intérieurs à une infinité des surfaces* V.

Donnons-nous arbitrairement un nombre Δ_1 et enfermons F dans un nombre fini de surfaces polygonales ayant chacune un diamètre

inférieur à Δ_1 (n° **68**). Nous appellerons ces surfaces polygonales, les *surfaces d'ordre* 1. A l'intérieur de chacune d'elles, il y a une portion de F qui est, comme F, un ensemble fermé partout discontinu. Il peut d'ailleurs arriver que certains de ces ensembles partiels se réduisent à un point. Envisageons d'abord ceux de ces ensembles partiels qui ont au moins deux points, et soit Δ_2 un nombre inférieur au diamètre de chacun d'eux et à la moitié de Δ_1. Enfermons chacun de ces ensembles partiels dans un nombre fini de surfaces polygonales ayant un diamètre inférieur à Δ_2 et totalement intérieures à la surface d'ordre 1 qui le contient. D'après la première condition imposée à Δ_2, nous aurons ainsi au moins deux variétés pour chacun des ensembles partiels envisagés. Quant aux ensembles partiels réduits à un point, nous enfermerons chacun d'eux dans une surface polygonale de diamètre inférieur à Δ_2 et intérieure à la surface d'ordre 1 qui le contient. Les surfaces ainsi définies constituent *les surfaces d'ordre* 2.

A partir de ces surfaces d'ordre 2, nous construirons des surfaces d'ordre 3, comme nous avons construit les surfaces d'ordre 2 à partir des surfaces d'ordre 1; nous continuerons indéfiniment. L'infinité dénombrable de surfaces ainsi construites se répartissent en surfaces d'ordre 1, 2, 3, ..., λ, ... et ont les propriétés suivantes :

a. Quel que soit λ, les surfaces d'ordre λ sont en nombre fini et extérieures les unes aux autres ;

b. A l'intérieur de chaque surface d'ordre λ, il y a au moins une surface d'ordre $\lambda + 1$, et chaque surface d'ordre $\lambda + 1$ est intérieure à une surface d'ordre λ ;

c. Le diamètre maximum Δ_λ des surfaces d'ordre λ tend vers zéro quand λ augmente indéfiniment.

(Cette dernière propriété provient de la seconde condition imposée à Δ_2, $\Delta_2 < \frac{1}{2}\Delta_1$.)

Je dis que F *coïncide avec l'ensemble des points qui sont intérieurs à une infinité des surfaces ainsi définies.* Tout d'abord, chaque point de F est intérieur à une infinité de ces surfaces, car il est

intérieur à une surface (et d'ailleurs une seule) de chacun des ordres. Soit maintenant M un point intérieur à une infinité des surfaces V; montrons qu'il appartient à F. Étant donné λ' quelconque, il y a un nombre $\lambda > \lambda'$ tel que M soit intérieur à une surface d'ordre λ, puisque le nombre des surfaces d'ordre au plus égal à λ' est fini. M est donc intérieur à une surface et une seule de chacun des ordres. Soient $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_\lambda, \ldots$ ces surfaces. Chacune d'elles contient au moins un point de F : soient M_1, M_2 $M_3, \ldots, M_\lambda, \ldots$ des points distincts, ou confondus, respectivement intérieurs à $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_\lambda, \ldots$; M et M_λ étant intérieurs à V_λ, on a $MM_\lambda < \Delta_\lambda$. Or Δ_λ tend vers zéro quand λ augmente indéfiniment. Par suite, M appartient à F, puisque F est fermé.

La proposition est démontrée.

70. Réciproquement : *Soit une infinité dénombrable de surfaces* V (*polygonales ou non*) *satisfaisant aux trois conditions* (*a*, *b*, *c*) *du numéro précédent. Je dis que l'ensemble* F *des points intérieurs à une infinité de ces surfaces est un ensemble fermé partout discontinu.*

Dans cet énoncé, ainsi que dans les conditions *a*, *b*, *c*, les mots intérieur et extérieur doivent être entendus au sens strict.

A chacune des surfaces V attachons un point M′ intérieur à cette surface ou situé sur elle et soit F′ l'ensemble de ces points M′, supposés tous différents [1], ce qui est manifestement réalisable. *Je dis que* F *est le dérivé de l'ensemble* F′. Montrons d'abord que tout point M appartenant au dérivé de F′ appartient à F, c'est-à-dire est intérieur à une infinité des surfaces V, ou, ce qui revient au même, est intérieur à une surface V d'ordre λ, quel que soit λ. M appartenant au dérivé de F′ a, dans son voisinage, une infinité de points M′. Mais les points M′ relatifs aux surfaces V d'ordre au plus égal à λ sont en nombre fini. Donc M a dans son voisinage une infinité de points M′ relatifs aux surfaces dont l'ordre est supérieur à λ; il appartient donc au dérivé de l'ensemble F'_1 des

[1] Si l'on ne prenait pas les points tous différents, il faudrait, comme toujours en pareil cas, convenir qu'un point P qui correspond à une infinité de surfaces est considéré comme appartenant au dérivé de F′.

points M′ fournis par les surfaces d'ordre supérieur à λ. Mais, par construction et en vertu de la propriété b, F'_1 est intérieur à l'ensemble des surfaces d'ordre $\lambda + 1$. Ces surfaces sont elles-mêmes intérieures à l'ensemble des surfaces d'ordre λ et ont avec elles un écart non nul ε. Le dérivé de F'_1 (et par suite M) est donc intérieur à l'ensemble des surfaces d'ordre λ et tout point de ce dérivé a un écart au moins égal à ε avec ces surfaces. Donc M est intérieur (au sens strict) à une des surfaces d'ordre λ.

Inversement, tout point M intérieur à une infinité de surfaces V appartient au dérivé de F′.

En effet, M est, quel que soit F, intérieur à une surface V d'ordre supérieur à λ, donc est à une distance inférieure à Δ_λ du point M′ correspondant. Et puisque Δ_λ tend vers zéro avec $\frac{1}{\lambda}$, M est limite de points M′. F est donc bien le dérivé de F′. Par suite, F est *fermé*.

Remarquons qu'un point M de F définit une suite de surfaces V auxquelles il est intérieur, et qu'inversement, toute suite de surfaces V des ordres 1, 2, 3, ... emboîtées les unes dans les autres définit un point de F. Nous établissons ainsi une *correspondance biunivoque entre les suites du type considéré* (S) *et les points de* F.

Chaque surface V peut être introduite dans une suite S. *Donc il y a des points de* F *à l'intérieur de chaque surface* V. De plus, chaque point de F est intérieur à une surface V d'ordre λ; donc, quel que soit λ, *tout* F *est enfermé dans l'ensemble des surfaces* V *d'ordre* λ.

Montrons maintenant que F est *partout discontinu*. Pour cela, considérons deux points M, M′ de F. On peut déterminer un ordre λ assez élevé pour que Δ_λ soit inférieur à la distance MM′. M et M′ sont alors intérieurs à deux surfaces distinctes V, V′ d'ordre λ. Or tout F est contenu dans l'ensemble des surfaces d'ordre λ et ces surfaces sont extérieures les unes aux autres et ont un écart mutuel non nul η. On ne pourra donc pas cheminer sur F, de M à M′, par pas inférieurs à η. F est partout discontinu.

71. L'ensemble des points intérieurs à une infinité des surfaces V qui satisfont aux conditions a, b, c du n° 69 est donc un

ensemble fermé partout discontinu et, inversement, tout ensemble fermé partout discontinu borné peut être défini de cette façon. Nous appellerons *surfaces de définition* d'un ensemble fermé discontinu, les surfaces V qui lui donnent naissance par ce procédé. Ces surfaces peuvent être choisies polygonales, chacune ayant un nombre fini de sommets.

Dans le cas des ensembles plans, ces surfaces deviennent des courbes sans point multiple et sans point commun. On peut prendre comme courbes des lignes polygonales et nous dirons qu'elles constituent les *polygones de définition* de l'ensemble.

Enfin, pour un ensemble de l'espace à une dimension (ensemble situé sur une droite), chaque surface devient les deux extrémités d'un intervalle. Nous dirons que ces intervalles sont les *intervalles de définition* de l'ensemble.

Le procédé indiqué peut d'ailleurs servir à définir un ensemble fermé borné quelconque. Il suffit de considérer les mots *extérieur* et *intérieur* au sens large, au lieu de les prendre au sens strict.

72. Comme première application de ces propriétés, démontrons que *tout ensemble fermé, partout discontinu, borné est situé sur un arc de Jordan sans point multiple.*

Soit F un tel ensemble de l'espace à n dimensions. Nous le supposerons donné au moyen de ses surfaces polygonales de définition V. Nous désignerons toutes ces surfaces par la même lettre V affectée d'un indice inférieur désignant son ordre, et, s'il y a lieu, d'un indice supérieur distinguant les surfaces d'un même ordre. Nous supposerons, comme nous pouvons toujours le faire, qu'il y a une seule surface d'ordre 1.

Sur chaque surface V marquons deux points A et B que nous affecterons des mêmes indices que cette surface V. Nous construirons l'arc de Jordan de la façon suivante. Soit V_λ une des surfaces V. Supposons qu'elle contienne $\varkappa$ surfaces d'ordre $\lambda + 1$ que nous désignerons par les indices supérieurs 1, 2, ..., $\varkappa$. Joignons les points A_λ, $A^1_{\lambda+1}$; $B^1_{\lambda+1}$, $A^2_{\lambda+1}$; $B^2_{\lambda+1}$, $A^3_{\lambda+1}$, ..., $B^{\varkappa-1}_{\lambda+1}$, $A^\varkappa_{\lambda+1}$; $B^\varkappa_{\lambda+1}$, B_λ; respectivement, par des lignes polygonales ne se coupant pas, sans point multiple, chacune de ces lignes étant, sauf ses extré-

mités, intérieure à V_λ et extérieure aux surfaces $V_{\lambda+1}$ considérées. Il est possible de construire ces lignes, même dans le cas de l'espace à deux dimensions [1], car il faut, dans ce cas, la totalité de ces lignes pour partager en régions la portion du plan intérieure à V_λ et extérieure aux $V_{\lambda+1}$. Les surfaces V ayant chacune un nombre fini de sommets, je peux aussi imposer aux lignes construites la condition d'avoir chacune un nombre fini de sommets. Ajoutons à toutes les lignes construites l'ensemble F. Je dis que l'ensemble L ainsi obtenu est un arc de Jordan sans point multiple, qui contiendra naturellement F par sa définition même.

Pour le prouver, considérons, sur l'axe des t, le segment $(0, 1)$ que j'appelle l et montrons que l'on peut considérer L comme une image biunivoque et continue de l.

Aux deux points A_1, B_1, pris sur la seule surface d'ordre 1, je fais correspondre les deux extrémités a_1, b_1 de l. Supposons connus les points a_λ, b_λ correspondant aux points A_λ, B_λ d'une même surface V_λ et supposons que cette surface contienne $\varkappa$ surfaces d'ordre $\lambda + 1$. Partageons le segment $a_\lambda b_\lambda$ en $2\varkappa + 1$ parties égales par des points que je note $a^1_{\lambda+1} + 1$, $b^1_{\lambda+1}$, $a^2_{\lambda+1}$, $b^2_{\lambda+1}$, $\ldots$, $a^\varkappa_{\lambda+1}$, $b^\varkappa_{\lambda+1}$, l'abscisse de l'un de ces points étant supposée inférieure à celles des points qui le suivent. La correspondance entre les A, B et les a, b résulte de leur notation.

Prenons maintenant une des lignes polygonales construites, $A^1_{\lambda+1}B^1_{\lambda+1}$, je lui fais correspondre le segment de l limité par les points homologues, la correspondance conservant la similitude des segments homologues. Jusqu'ici la correspondance est manifestement biunivoque et continue.

Pour définir les homologues des points de F, remarquons que les points a, b de mêmes indices sont extrémités d'un intervalle ρ, que j'affecte des mêmes indices, et que ces intervalles remplissent les conditions voulues pour définir un ensemble fermé partout discontinu f. D'ailleurs les intervalles ρ ont la même disposition relative que les surfaces V de mêmes indices. Soit alors M un point de F; il est intérieur à toutes les surfaces V d'une suite du type (S)

[1] Je n'envisage naturellement pas le cas où F serait sur une droite.

(n° **70**). A cette suite (S) correspond une suite d'intervalles v définissant un point m et un seul de f que je ferai correspondre à M. La correspondance ainsi réalisée entre F et f est biunivoque et, ajoutée aux correspondances précédentes, elle donne une correspondance biunivoque entre L et l.

Il reste à prouver que cette correspondance est continue. Ceci a lieu pour les points n'appartenant pas à F et à f. Montrons-le pour les points de ces ensembles. Soient M, m deux points homologues sur F et f et M', m' deux points homologues quelconques de L et l. Il faut prouver que, étant donné H, on peut lui faire correspondre h tel que $mm' < h$ entraîne $MM' < H$. Or je peux déterminer un nombre λ assez grand pour que la surface d'ordre λ qui contient M ait un diamètre inférieur à H. Soient A, B les deux points qui ont été pris sur cette surface. Soient a, b leurs homologues sur l. m est intérieur à ab et l'homologue du segment ab est intérieur à la surface considérée et par suite la distance de chacun d'eux à M est inférieure à H. Il suffit donc de prendre h inférieur à la distance de m à a et à b pour réaliser les conditions voulues.

L est donc bien l'arc de Jordan cherché.

75. *Cas des ensembles parfaits partout discontinus.* — Les résultats qui précèdent s'appliquent évidemment aux ensembles parfaits partout discontinus bornés. On peut cependant imposer des conditions plus particulières aux surfaces de définition de ces ensembles.

Soit P un ensemble parfait discontinu. Reprenons sur cet ensemble les raisonnements du n° **69**. Supposons P enfermé dans un nombre fini de surfaces d'ordre λ. Soit P' la partie de P intérieure à l'une de ces surfaces. P' est maintenant un ensemble parfait, qui, par suite, a un diamètre non nul. Dans la construction des surfaces d'ordre $\lambda + 1$, on pourra donc faire en sorte qu'il y ait au moins deux surfaces intérieures à la surface d'ordre λ envisagée. Ainsi, on peut remplacer la condition b par la suivante :

b'. *A l'intérieur de chaque surface d'ordre λ, il y a au moins deux*

surfaces d'ordre $\lambda + 1$ *et chaque surface d'ordre* $\lambda + 1$ *est intérieure à une surface d'ordre* λ.

Réciproquement, considérons une infinité dénombrable de surfaces V *satisfaisant aux conditions* a, b', c; *je dis que l'ensemble des points intérieurs à une infinité des surfaces* V *est un ensemble parfait partout discontinu.*

L'ensemble défini par ces surfaces est fermé partout discontinu (n° **70**). Il suffit donc de prouver que chacun de ses points est point limite pour l'ensemble. Soit M un tel point. Il faut montrer que, quel que soit ε, il existe un autre point M′ de l'ensemble tel que $MM' < \varepsilon$. Or nous pouvons déterminer un nombre λ tel que les surfaces d'ordre λ aient un diamètre inférieur à ε. Soit V celle de ces surfaces qui contient M. A l'intérieur de V, il y a au moins deux surfaces d'ordre $\lambda + 1$. L'une d'elles contient M. Les autres contiennent des points de P autres que M. Ces points étant intérieurs à V, la distance de chacun d'eux à M est inférieure à ε.

C. Q. F. D.

74. *Il résulte de ceci que deux ensembles parfaits partout discontinus bornés quelconques sont homéomorphes.* Il nous suffit de prouver qu'un tel ensemble P est homéomorphe à un ensemble particulier p. Comme ensemble p nous prendrons l'ensemble obtenu sur l'axe des t en enlevant du segment (0, 1), le tiers moyen (extrémités non comprises), puis de chacun des deux segments restant le tiers moyen et ainsi de suite indéfiniment. Rangeons dès maintenant les intervalles contigus à p; nous les supposerons classés par ordre de grandeur décroissante, ceux qui ont même longueur étant rangés par abscisses croissantes.

Nous supposerons P donné par ses surfaces de définition V satisfaisant aux trois conditions a, b', c. Nous allons chercher à définir p par des intervalles v satisfaisant à ces mêmes conditions. Nous établirons en même temps une correspondance biunivoque entre les surfaces V et les intervalles v, faisant correspondre des intervalles et des surfaces de même ordre.

Nous pouvons supposer qu'il y a une seule surface d'ordre 1. Nous lui ferons correspondre, comme intervalle d'ordre 1, un inter-

valle un peu plus grand que l'intervalle (0, 1). Supposons les correspondances établies jusqu'à l'ordre λ inclusivement. Soit V_λ une surface particulière d'ordre λ et supposons qu'elle contienne $\varkappa$ surfaces d'ordre $\lambda + 1$, $V^1_{\lambda+1}$, $V^2_{\lambda+1}$, ..., $V^\varkappa_{\lambda+1}$ ($x \geqq 2$). Soient a_λ et b_λ les extrémités de l'intervalle φ_λ correspondant à V_λ. Dans la suite des intervalles contigus à p, rangés comme il a été dit, considérons les $\varkappa - 1$ premiers qui soient totalement intérieurs à a_λ, b_λ. En dehors de ces intervalles contigus et de ceux qui contiennent a_λ et b_λ, il y a, sur $a_\lambda b_\lambda$, $\varkappa$ segments qui contiennent tous les points de p sur φ_λ. Enfermons ces $\varkappa$ segments dans $\varkappa$ intervalles intérieurs à φ_λ et n'empiétant pas les uns sur les autres. Ces intervalles constitueront les $\varkappa$ intervalles $\varphi_{\lambda+1}$ que je ferai correspondre par une loi arbitraire, mais de façon biunivoque, aux $\varkappa$ surfaces $V_{\lambda+1}$. Pour la construction de ces intervalles $\varphi_{\lambda+1}$, il y aura lieu de prendre une précaution facile, si l'on veut, comme nous en aurons besoin, que la longueur maxima δ_λ des segments d'ordre λ tende vers zéro, quand λ augmente indéfiniment. Il suffira que les extrémités de φ_λ et du segment qu'il enferme aient un écart assez petit, cet écart tendant vers zéro quand λ augmente indéfiniment.

Ceci étant, les intervalles φ que nous avons définis remplissent les trois conditions a, b', c et définissent par suite un ensemble parfait partout discontinu qui n'est autre que p. En effet, tout point de p est intérieur à une infinité des intervalles φ: tout point intérieur à une infinité des intervalles φ est, soit une extrémité d'intervalle contigu à p, soit un point limite d'une infinité de telles extrémités, donc appartient à p. La correspondance entre les surfaces V et les intervalles φ est biunivoque, et les intervalles ont même disposition relative que les surfaces qui leur correspondent. Soit alors M un point de P. Il est intérieur à toutes les surfaces V d'une suite unique du type (S) (n° **70**). Aux surfaces de cette suite, correspondent des intervalles définissant un point unique m de p que je ferai correspondre à M. Cette correspondance s'étend à tout P et tout p, et est *biunivoque*.

Il reste à prouver qu'elle est *continue*, c'est-à-dire que, M et m étant deux points homologues particuliers, M′ et m', deux points homologues quelconques :

1° Étant donné H, on peut déterminer h tel que $mm' < h$ entraîne $MM' < H$;

2° Étant donné h, on peut déterminer H tel que $MM' < H$ entraîne $mm' < h$.

H étant donné, je peux déterminer λ de façon que le diamètre des surfaces d'ordre λ soit inférieur à H. Soient V la surface d'ordre λ qui contient M et v l'intervalle correspondant. v contient m, et tous les points de p intérieurs à v ont leurs homologues à l'intérieur de V. Il suffit donc de prendre h inférieur à la distance de m aux extrémités de v pour être assuré que $mm' < h$ entraîne $MM' < H$.

La seconde condition se réalise de façon analogue en intervertissant les rôles de P et p. Cette réalisation est possible, puisque la longueur maxima δ_λ des intervalles v d'ordre λ tend vers zéro quand λ augmente indéfiniment.

P et p sont donc homéomorphes [1].

CHAPITRE II.

LES ENSEMBLES PARFAITS PARTOUT DISCONTINUS PLANS.

75. Les ensembles parfaits, partout discontinus, bornés, plans, sont, au point de vue du problème qui nous occupe, dans le premier des trois cas possibles : *leur correspondance peut s'étendre à la totalité de leurs plans.* Il nous suffira de faire la démonstration dans le cas où l'un des ensembles est un ensemble particulier.

Soient alors P un ensemble, parfait discontinu, borné, quelconque, du plan E, et p l'ensemble utilisé au n° **74**. La démonstration faite à ce numéro a prouvé que P et p sont homéomorphes. Je me propose d'étendre cette correspondance à la totalité de E et de e.

Nous supposerons P donné par ses polygones de définition V. Nous supposerons encore qu'il y a un seul polygone d'ordre 1. La démonstration du n° **74** a fait correspondre à ces polygones des intervalles de définition de p. Nous en déduisons immédiatement

---

[1] Ce résultat, ainsi que celui du n° **72**, ont été, comme je l'ai déjà dit, énoncés par M. Denjoy, *C. R. Acad. Sc.*, t. **149**, 1909, p. 1048, et t. 151, 1910, p. 138.

des polygones de définition de p : il suffit de remplacer chaque intervalle par le carré dont il est la diagonale. Nous appellerons φ ces carrés. La correspondance entre les carrés φ et les polygones V résulte de la correspondance établie au n° **74** entre les V et les intervalles de définition de p. Cette correspondance entraîne aussi l'homéomorphie de P et p comme il a été dit au n° **74**.

Soient alors V et φ un polygone et un carré se correspondant. Si leurs contours n'ont pas le même nombre de sommets, je marquerai sur l'un de ces contours un certain nombre de points que j'appellerai *sommets*, de façon à égaliser ces nombres. J'établis alors entre ces contours une correspondance continue, les faisant correspondre sommet à sommet, côté à côté, la correspondance entre côtés étant une similitude. Je fais en outre en sorte que les sens de description des deux contours soient concordants.

La correspondance entre les contours ainsi établie, soient V un polygone d'ordre λ et φ son homologue. Supposons que V contienne à son intérieur $\varkappa$ polygones d'ordre $\lambda + 1$; φ contiendra à son intérieur les $\varkappa$ carrés homologues. La correspondance établie entre les contours s'étend à la région annulaire qu'ils limitent (n° **22**). L'extension se fait de même pour les extérieurs du polygone et du carré d'ordre 1. Ajoutons enfin à ces correspondances la correspondance entre P et p. J'obtiens ainsi une *correspondance biunivoque de tout* E *et tout* e. Tout point de l'un des plans n'appartenant pas à l'ensemble discontinu a, en effet, avec cet ensemble un écart non nul. Il est alors extérieur aux polygones de l'ordre λ assez élevé pour que le diamètre des polygones de cet ordre soit inférieur à cet écart. Il entre donc dans une des correspondances envisagées.

Il reste à prouver que la correspondance est *continue*. Ceci a manifestement lieu en dehors de P et p. Soient alors M, m deux points homologues particuliers de P et p, et M′, m' deux points homologues quelconques de E et e. Il faut montrer que :

1° Étant donné H, on peut déterminer h tel que $mm' < h$ entraîne $MM' < H$;

2° Étant donné h, on peut déterminer H tel que $MM' < H$ entraîne $mm' < h$.

H étant donné, soit λ un ordre assez grand pour que Δ_λ, maximum du diamètre des polygones d'ordre λ, soit inférieur à H et soit V le polygone de cet ordre qui contient M. Son homologue v contient m et tous les points intérieurs à v ont leurs homologues dans V. Il suffit alors de prendre h inférieur à l'écart non nul de m avec le contour de v.

La deuxième partie se démontre de la même façon.

La proposition est établie.

76. Comme application, démontrons la propriété suivante : *Soient, dans un plan* E, *deux ensembles parfaits partout discontinus, bornés,* P, P′ *sans point commun. On peut passer de* P *à* P′ *par une déformation homéomorphe de* E *n'altérant qu'une région bornée.* Au cours de cette déformation, les divers points de P décriront des arcs de Jordan sans point multiple et sans point commun, dont l'extrémité seule appartient à P′.

Les deux ensembles, étant parfaits et sans point commun, ont un écart non nul ε. Supposons que chacun d'eux soit donné par ses polygones de définition V, V′. Nous pouvons déterminer un ordre λ assez grand pour que les polygones V et V′ de cet ordre aient un diamètre inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$. Les polygones V et V′ de cet ordre n'empiètent pas les uns sur les autres. Je peux les considérer comme étant les polygones d'ordre 1 de l'ensemble parfait discontinu P + P′.

Soit alors, dans un plan e, l'ensemble p porté par l'axe Ox, p étant toujours l'ensemble particulier déjà défini. Considérons un deuxième ensemble p' déduit de p par une translation parallèle à l'axe des y. Je supposerai ces ensembles définis par leurs carrés de définition, choisis de façon à établir l'homéomorphie de P et p d'une part, P′ et p' d'autre part. Je supposerai d'ailleurs p et p' assez écartés pour que les carrés d'ordre λ de p et p' ne se touchent pas. Au moyen des polygones V, V′ et des carrés v, v' d'ordre au moins égal à λ, la correspondance entre P et p et celle entre P′ et p' s'étendent à la totalité de E et de e. Les raisonnements sont analogues à ceux du numéro précédent.

Il suffit alors de prouver sur p et p' la proposition que je veux établir. Or, dans e, la possibilité de la déformation est manifeste. Il suffira que, dans cette déformation, chaque point de p décrive un segment parallèle à l'axe Oy. On pourrait d'ailleurs, au lieu des ensembles p et p' considérés, prendre deux ensembles homothétiques sur deux arcs de cercle homothétiques et concentriques et appliquer à ces ensembles la déformation indiquée au n° **26**.

77. Disons enfin un mot de la correspondance entre ensembles situés sur une droite. Soient P un ensemble parfait, partout discontinu, borné, situé sur une droite E (axe des T) et p un autre ensemble situé sur une droite e (axe des t). *Il y a des correspondances entre* P *et* p *qui s'étendent à la totalité de* E *et* e. Nous supposerons toujours que p est l'ensemble particulier déjà envisagé et que P est donné par ses intervalles de définition V.

Pour mettre en évidence la propriété que j'énonce, il suffira de prendre une précaution dans la détermination des intervalles de définition de p. Soient A, B les extrémités d'un intervalle V d'ordre λ de P contenant à son intérieur $\varkappa$ intervalles d'ordre $\lambda + 1$ et soit ab l'intervalle v correspondant de p. Les $\varkappa$ intervalles d'ordre $\lambda + 1$ que contient v sont déterminés, mais la manière dont on les fait correspondre à ceux contenus dans V est arbitraire. Je choisirai cette correspondance de manière qu'en décrivant AB d'une part, ab d'autre part, les intervalles correspondants se présentent dans le même ordre. Je fais alors correspondre les extrémités de ces intervalles dans l'ordre où elles se présentent. E et e sont alors découpés en tronçons. Si un tronçon de E, ne contenant pas de points de P, est limité par deux points A, B, les deux points homologues a, b limitent sur e un tronçon ne contenant pas de points de p. Je ferai correspondre ces tronçons par similitude. J'ajoute à ces correspondances la correspondance entre P et p résultant de la construction des intervalles de définition de p et aussi une correspondance entre les extérieurs de l'intervalle d'ordre 1 de P et de l'intervalle d'ordre 1 de p. J'obtiens ainsi la correspondance cherchée entre E et e. Dans cette correspondance, les points homologues de P et de p se présentent dans le même ordre sur E et e.

Ceci s'étend immédiatement aux ensembles parfaits discontinus situés sur des courbes de Jordan sans point multiple d'un espace quelconque. Soient P et p deux ensembles parfaits discontinus situés respectivement sur des arcs de Jordan sans point multiple Γ et γ, les extrémités de ces arcs n'appartenant pas aux ensembles. Supposons que les coordonnées d'un point de Γ s'expriment en fonctions continues d'un paramètre T variant de 0 à 1. Faisons correspondre aux points de Γ les points de l'axe des T dont l'abscisse est leur paramètre. A Γ correspond un segment de droite Γ' et à P un ensemble parfait partout discontinu P' situé sur Γ'. Faisons de même pour p : à γ correspond un segment de droite γ' et à p un ensemble parfait discontinu p' sur γ'. Or, on peut étendre à la totalité de Γ' et de γ' une certaine correspondance entre P' et p' et il en résulte l'extension à la totalité de tout Γ et de tout γ d'une certaine correspondance entre P et p. (Ceci ne s'applique naturellement pas à une correspondance quelconque entre P et p.)

La même propriété a évidemment lieu si Γ et γ sont des courbes fermées. Elle a aussi lieu, dans le cas des courbes ouvertes, si certaines extrémités de ces courbes appartiennent aux ensembles sous la réserve que, si un point de P est extrémité de Γ, le point correspondant de p soit aussi extrémité de γ.

CHAPITRE III.

LES ENSEMBLES PARFAITS PARTOUT DISCONTINUS DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

78. Les résultats ne sont plus aussi simples pour l'espace à trois dimensions. La correspondance entre deux ensembles parfaits, partout discontinus, bornés, gauches, peut, soit s'étendre à tout l'espace, soit s'étendre aux voisinages de ces ensembles, soit ne s'étendre à aucun voisinage. Nous allons donner des exemples de ces deux derniers cas. Ils résulteront des propriétés d'un ensemble particulier, que je désignerai par P et que je vais définir.

P est donné par ses *surfaces de définition* (n° **75**). Toutes ces sur-

faces sont des *tores*, que je désignerai par T. Je suppose qu'il existe un seul tore d'ordre 1. Si je considère un tore quelconque d'un ordre quelconque λ, je suppose qu'il contient à son intérieur k tores d'ordre $\lambda + 1$ et que ces *tores sont enlacés comme les anneaux d'une chaîne fermée entourant l'axe du tore* d'ordre λ considéré.

Précisons ces définitions. Je dis que *deux tores sont enlacés*, si, étant extérieurs l'un à l'autre, un parallèle de l'un est enlacé avec un parallèle de l'autre. Il en sera de même pour deux parallèles quelconques pris un sur chacun de ces tores, et aussi pour toute courbe se déduisant d'un parallèle sans sortir du tore envisagé. En particulier, si deux tores sont enlacés, les lieux des centres de leurs méridiens sont enlacés. Pour simplifier le langage, j'appellerai *circonférence d'ordre λ, intérieure à un tore d'ordre λ, le lieu des centres des méridiens de ce tore*. Je désignerai ces circonférences par la lettre C.

Numérotons de 1 à k les k tores d'ordre $\lambda + 1$ intérieurs à un tore d'ordre λ. Je supposerai que deux tores ayant des numéros consécutifs, ainsi que les tores k et 1, sont enlacés, alors que deux tores non consécutifs ne sont pas enlacés. Je suppose enfin que les centres de ces k tores sont sur la circonférence d'ordre λ et qu'en joignant ces points dans l'ordre de leurs numéros, on forme un polygone régulier non étoilé. Ces conditions sont possibles à réaliser. Il suffit pour cela que le rayon du méridien d'un tore T soit assez petit, par rapport au rayon de la circonférence C de ce tore, et que k soit assez grand. On peut alors prendre pour tores d'ordre $\lambda + 1$ des tores semblables au tore d'ordre λ. La possibilité de la construction a alors lieu quel que soit λ, k étant fixe. Pour simplifier quelques raisonnements ultérieurs, je *supposerai que ce nombre k est pair*.

Enfin le diamètre d'un tore d'ordre $\lambda + 1$ est inférieur à la moitié du diamètre du tore d'ordre λ qui le contient. Donc le diamètre maximum des tores d'ordre λ tend vers zéro quand λ augmente indéfiniment. Les tores T satisfont donc aux trois conditions a, b', c (n° **75**); ils définissent donc bien un ensemble parfait partout discontinu P, qui est l'ensemble des points intérieurs à une infinité des tores T.

79. THÉORÈME. — *L'ensemble* P *qui vient d'être défini et tout ensemble parfait, discontinu, p situé sur une droite sont homéomorphes seulement en eux-mêmes.*

Supposons qu'il existe une correspondance entre P et p qui puisse s'étendre à leurs voisinages. Soient M et m deux points homologues de P et p. m est centre d'une sphère s dont tout l'intérieur appartient au voisinage en question de p. Il y a d'ailleurs dans s une infinité de points de p, p étant parfait. Soient alors a et b deux points de la droite portant p, intérieurs à s, n'appartenant pas à p, tels que m soit entre a et b et qu'il y ait dans s des points de p extérieurs à l'intervalle ab. La sphère σ de diamètre ab ne contient alors aucun point de p sur sa surface, elle est intérieure à s, m est à son intérieur et il y a dans l'intérieur de s des points de p extérieurs à σ.

σ étant intérieure à s, il lui correspond dans l'espace de P une *surface simplement connexe sans point multiple* Σ ne passant par aucun point de P ayant des points de P dans chacune de ses régions. Pour démontrer le théorème, il me suffit alors de prouver que ceci est impossible. C'est ce qui résulte du théorème suivant.

80. THÉORÈME. — *Toute surface simplement connexe sans point multiple* Σ *qui a des points de* P *dans chacune de ses régions coupe* P.

Supposons qu'il existe une surface simplement connexe sans point multiple Σ, ayant des points de P dans chacune de ses régions et ne coupant pas P. Σ et P ont alors un écart non nul et l'on peut déterminer un nombre λ tel que tous les tores d'ordre λ aient un diamètre inférieur à cet écart. Or chaque tore d'ordre λ contient des points de P. *Aucun d'eux ne coupera donc* Σ. De plus, l'ensemble des tores d'ordre λ contient tout P, dont il y a *des tores d'ordre* λ *dans chacune des deux régions de* Σ. *La même propriété a lieu pour les circonférences d'ordre* λ.

Soient T un tore particulier d'ordre $\lambda + 1$ et $C_1, C_2, \ldots, C_k$ les k circonférences d'ordre λ qu'il contient. C_1 C_2 étant enlacées sont dans la même région de Σ, de même C_2 et C_3, ..., C_k et C_1

(n° **54**). Nous allons d'ailleurs reprendre la démonstration de cette propriété et en tirer d'autres conséquences.

Appelons $2i$ le cercle limité par C_{2i} et A_{2i-1} et A_{2i} les points d'intersection de L_{2i} respectivement avec C_{2i-1} et C_{2i+1}. Envisageons d'abord le cercle Γ_2 et les points A_1, A_2. Je dis que ces points peuvent être joints sur L_2 par une ligne polygonale ne coupant pas Σ. Enfermons en effet Σ dans un domaine polyédral D non enlacé avec C_1, C_2 et C_3. Nous pouvons choisir ce domaine de façon que les cubes qui le constituent n'aient aucun de leurs sommets dans le plan de C_2 (n° **30**). La frontière de l'ensemble des points de D situés sur Γ_2 est alors formée d'un nombre fini de contours polygonaux I sans point multiple et sans point commun, ne touchant pas C_2. Le point A_1 n'est intérieur à aucun de ces polygones. Si, en effet, il était intérieur au contour I, C_1 serait enlacé avec I, ce qui est impossible puisque I appartient à D. De même, A_2 n'est intérieur à aucun des contours I. *Donc on peut joindre* A_1 *et* A_2 *sur* Γ_2 *par une ligne polygonale* α_2 *ne coupant pas* D, donc extérieure à D comme A_1 et A_2. α_2 *ne coupe pas* Σ qui est intérieure à D.

Construisons de même les lignes α_4, α_6, ..., α_k ne coupant pas Σ [1]. Appelons enfin α_{2i+1} l'un des deux arcs A_{2i}, A_{2i+1} de C_{2i+1}. L'ensemble de tous ces arcs forme une ligne fermée α ne coupant pas Σ, intérieure à T et enlacée avec l'axe de T. *Je vais prouver que, par une déformation homéomorphe de l'espace, n'altérant que l'intérieur de* T, *je peux passer de* α *à la circonférence d'ordre* $\lambda - 1$ *que contient* T.

81. Considérons d'abord l'arc α_2. Appelons β_2 le segment de droite $A_1 A_2$. On peut passer de α_2 à β_2 par une déformation de Γ_2 sur lui-même, n'altérant pas la frontière C_2. Ceci résulte du théorème du n° **26**. Mais la déformation qui est indiquée à ce numéro ne conviendra pas ici parce que les points A_1, A_2 ne restent pas fixes, alors que cette fixité me sera nécessaire. Mais α_2 étant une ligne polygonale, il n'y a pas de difficulté à réaliser cette condition.

---

[1] Je rappelle que le nombre k est pair.

Pour cela, remarquons que α_2 est partagé en tronçons par β_2. Il y a deux tronçons particuliers d'extrémités A_1 ou A_2. J'appellerai *tronçon de la première catégorie* un des tronçons restant et tel que le contour formé par ce tronçon et le segment rectiligne joignant ses extrémités ne contienne à son intérieur ni A_1 ni A_2. Par un raisonnement analogue à celui du n° **45**, je peux définir des déformations du type envisagé faisant disparaître ces tronçons de première catégorie et ceci en diminuant le nombre des extrémités de tronçons. Ces déformations faites, parcourons la nouvelle ligne α_2 de A_1 vers A_2 et appelons B le premier point de rencontre avec β_2. Sur le segment A_1 B, il n'y a pas d'extrémités de tronçons, car une telle extrémité appartiendrait nécessairement à un tronçon de la première catégorie, tronçon qui serait totalement intérieur au contour formé par l'arc A_1 B et le segment A_1 B. Nous pouvons alors, par une déformation du type envisagé et portant sur un polygone un peu supérieur à celui limité par ce contour, faire disparaître l'extrémité B (*cf.* n° **45**). Cette opération ne fait d'ailleurs apparaître aucune nouvelle extrémité de tronçons et aucun tronçon de première catégorie. Je peux alors la répéter sur les extrémités restantes et j'arriverai à un arc α_2 n'ayant plus que ses extrémités A_1, A_2 en commun avec β_2. Une dernière déformation laissant ces extrémités fixes amènera finalement α_2 sur β_2.

Ceci étant, appliquons à la déformation totale et au cercle Γ_2 la propriété du n° **36**. Je la modifie légèrement en supposant qu'au lieu des normales à Γ_2, j'envisage une famille d'arcs de circonférence jouant le même rôle et dont C_1 et C_2 font partie. La détermination d'une telle famille ne présente aucune difficulté. *Je peux donc passer de α_2 à β_2 par une déformation homéomorphe de l'espace n'altérant que le voisinage de Γ_2, laissant fixes les points A_1, A_2 et par suite les circonférences C_1 et C_2.* Faisons des déformations analogues pour les arcs $\alpha_3, \alpha_6, \ldots, \alpha_k$.

Après ces déformations, Σ sera devenue une autre surface simplement connexe Σ', les portions de Σ intérieures à T ayant seules été modifiées. Les arcs $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_k$ et les arcs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ne coupent pas Σ' et si, par exemple, les circonférences C_i sont intérieures à Σ, ces arcs sont intérieurs à Σ'.

Considérons maintenant le cercle Γ_1 limité par C_1. Une déformation homéomorphe de l'espace n'altérant que le voisinage de Γ_1 permet de passer de α_1 au segment β_1, joignant A_k et A_1. Je fais la même déformation pour tous les arcs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. *J'obtiens ainsi une surface simplement connexe sans point multiple Σ'' qui n'est pas coupée par la courbe β, somme des arcs β_i.* Si d'ailleurs les courbes C_i sont intérieures à Σ, β est intérieur à Σ''. Les parties de Σ extérieures à T n'ayant pas été altérées, les circonférences d'ordre λ extérieures à T occupent la même position par rapport à Σ'' et à Σ.

La courbe β diffère très peu de la circonférence d'ordre $\lambda - 1$ que contient T. Une dernière déformation permet de passer de β à cette circonférence.

L'extérieur de T n'ayant pas été altéré, je peux répéter les mêmes opérations sur chacun des autres tores d'ordre $\lambda - 1$ sans modifier les propriétés acquises. Après ces opérations, j'arrive à une surface simplement connexe sans point multiple $\Sigma_{\lambda-1}$ ayant les propriétés suivantes :

$\Sigma_{\lambda-1}$ ne coupe aucune des circonférences d'ordre $\lambda - 1$. Il y a des circonférences d'ordre $\lambda - 1$ dans chacune des régions de $\Sigma_{\lambda-1}$, parce qu'il y avait des circonférences d'ordre λ dans chacune des régions de Σ.

82. $\Sigma_{\lambda-1}$ a donc par rapport aux circonférences d'ordre $\lambda - 1$ la propriété qu'avait Σ par rapport aux circonférences d'ordre λ. Les mêmes raisonnements me permettront d'en déduire une surface $\Sigma_{\lambda-2}$ ayant les mêmes propriétés par rapport aux circonférences d'ordre $\lambda - 2$ et de proche en proche j'arriverai à une surface simplement connexe Σ_2 ne coupant aucune des circonférences d'ordre 2 et en ayant dans chacune de ses régions. Or, ceci est impossible. En effet, les circonférences d'ordre 2 sont toutes intérieures au tore unique d'ordre 1 et par suite sont dans la même région de Σ_2 (n° **50**).

Il est donc impossible que Σ ne coupe pas P, ce qui démontre le théorème du n° **80** et achève la démonstration du théorème du n° **79**.

83. Soit Γ un arc de Jordan sans point multiple contenant P. Nous supposerons cet arc construit, par exemple, par le procédé indiqué au n° **72**, les polyèdres étant remplacés par les tores T. *Γ est un nouvel exemple d'un arc de Jordan dont la correspondance avec un segment de droite γ ne peut s'étendre à aucun voisinage.*

Si une correspondance entre Γ et γ pouvait s'étendre, il correspondrait à P un ensemble parfait discontinu p situé sur γ et l'on aurait en particulier une extension de la correspondance entre P et p. Nous venons de montrer qu'une telle extension est impossible.

La propriété est d'ailleurs vraie pour tout arc de Γ ayant un point de P comme point intérieur au sens strict. Si M est en effet un point de P intérieur à cet arc, il existe un ordre λ assez grand pour que les extrémités de l'arc soient extérieures au tore d'ordre λ qui contient M. L'arc, d'après la construction de Γ, contient alors toute la partie de P intérieure à ce tore, partie qui est un ensemble semblable à P.

84. De l'ensemble P, *je vais déduire deux ensembles* Q, Q′ *dont la correspondance peut s'étendre à leurs voisinages, mais pas à tout l'espace.* Q est la somme de deux ensembles P_1, P_2 égaux à P, les tores d'ordre 1, T_1, T_2, de ces ensembles étant enlacés. Q′ est la somme de deux ensembles P'_1, P'_2 égaux à P, les tores 1 d'ordre λ, T'_1, T'_2 de ces ensembles étant extérieurs l'un à l'autre et non enlacés. Il y a une correspondance immédiate entre Q et Q′ qui s'étend à leurs voisinages, celle qui résulte de l'égalité des quatre tores T_1, T_2, T'_1, T'_2, et des ensembles qu'ils contiennent. Je dis qu'il n'y a aucune correspondance entre Q et Q′ qui puisse s'étendre à tout l'espace. Supposons, en effet, qu'il y en ait une. Supposons T_1, T'_2 assez écartés pour que je puisse construire une sphère Σ' ayant T_2 à son intérieur et T'_1 à son extérieur. Σ' contient alors des points de Q′ dans chacune de ses régions et pas sur sa surface. Il lui correspond une surface simplement connexe sans point multiple Σ ayant la même propriété vis-à-vis de Q. Ceci est impossible, les raisonnements du n° **82** nous permettant de construire une surface simplement connexe sans point multiple ne coupant pas les deux circonférences d'ordre 1 de Q et en ayant une à son intérieur et

l'autre à son extérieur, ce qui est en contradiction avec le fait que ces circonférences sont enlacées.

85. Je déduis de Q et Q′ *deux arcs de Jordan* Γ, Γ′ *dont la correspondance peut s'étendre à leurs voisinages, mais pas à tout l'espace.* Γ est la somme de trois arcs Γ_1, Γ_2, Γ_3. L'arc Γ_1 est intérieur à T_1 et contient P_1; Γ_2 est intérieur à T_2 et contient P_2; Γ_3 joint une extrémité de Γ_1 et une extrémité de Γ_2 et c'est une ligne polygonale. Γ'_1, Γ'_2 sont respectivement égaux à Γ_1 et Γ_2, cette égalité résultant de celle des ensembles P et des tores T. Γ_3 joint une extrémité de Γ'_1 à une extrémité de Γ'_2 et est une ligne polygonale. La correspondance entre Γ et Γ′ s'étend de suite à leurs voisinages.

Supposons qu'il y ait une correspondance entre Γ et Γ′ qui puisse s'étendre à tout l'espace. Supposons Γ'_3 choisi de façon qu'il soit coupé en un seul point A′ par la sphère Σ′ envisagée au n° **84**. La surface Σ correspondante coupe alors Γ en un seul point A. Mais cette surface coupe Q, donc A appartient à Q, puisque tout Q est sur Γ. La même propriété s'applique à tous les points d'une portion rectiligne de Γ_3 voisine de A′. L'homologue de ce segment rectiligne serait donc une partie de Q, donc un ensemble discontinu, ce qui est impossible.

Cet exemple complète les résultats de la première Partie où nous avions indiqué une propriété de cette nature, mais pour une courbe fermée.

86. Le théorème du n° **80** a une allure paradoxale. Je vais en établir un autre de même nature.

Théorème. — *Soit* L *une courbe de Jordan extérieure à un des tores* T *de définition de* P *et enlacée avec la circonférence* C *lieu des centres des méridiens de* T. *Toute calotte simplement connexe* Σ *ayant* L *pour frontière coupe* P. *L'ensemble des points communs à* P *et à* Σ *n'est pas dénombrable.*

Je peux supposer que le tore T envisagé est le tore d'ordre 1, quitte à ne considérer que la partie de P intérieure à ce tore. Si l'on veut seulement montrer que P et Σ se coupent, on peut em-

ployer des raisonnements analogues à ceux qui ont servi pour le théorème du n° **80**. Si P et Σ ne se coupaient pas, il existerait un ordre λ tel qu'aucune des circonférences d'ordre λ ne couperait Σ. On en déduirait une autre calotte ayant même frontière L et ne coupant pas C. Ceci est impossible puisque L et C sont enlacées.

Pour démontrer en même temps que *l'ensemble des points communs à* P *et* Σ *n'est pas dénombrable*, il faut employer un autre procédé. Pour la symétrie des notations, j'affecterai de l'indice 1 les lettres (sauf P) qui figurent dans l'énoncé. Je vais alors établir le lemme suivant.

87. Lemme. — *Il existe sur* Σ_1 *une courbe* L_2 *extérieure à un des tores d'ordre* 2, *soit* T_2, *et enlacée avec la circonférence* C_2 *d'ordre* 2 *qu'il contient.*

Supposons qu'il n'existe pas de courbes L_2 satisfaisant à ces conditions. A chaque tore T_2 d'ordre 2, j'adjoins un tore parallèle et extérieur T'_2 assez voisin pour que la chaîne des tores T_2 ait les mêmes propriétés d'enlacement que la chaîne des tores T_2. Je montrerai que *je peux déterminer sur chaque tore* T'_2 *une courbe ne coupant pas* Σ, *non enlacée avec la circonférence d'ordre* 2 *intérieure à* T'_2 *et enlacée avec l'axe de ce tore.* Des déformations de l'espace n'altérant que le voisinage des tores T'_2 peuvent amener ces courbes à être des parallèles des tores T'_2. La chaîne formée par ces parallèles est analogue à la chaîne des circonférences d'ordre 2 et elle ne coupe pas la nouvelle surface déduite de Σ_1 par ces déformations, surface qui a encore L_1 pour frontière. Ceci est impossible, car on en déduirait une autre calotte de même frontière ne coupant pas C_1, qui est enlacée avec L.

Il suffit donc de prouver que, s'il n'existe pas sur Σ_1 de courbe extérieure à un tore T_2 d'ordre 2 et enlacée avec la circonférence C_2 d'ordre 2 qu'il contient, on peut déterminer sur T'_2 une courbe ne coupant pas Σ_1, non enlacée avec C_2 et enlacée avec l'axe de T_2.

Si Σ_1 ne coupe pas T'_2, la courbe cherchée est immédiate : ce sera par exemple un parallèle de T_2. Supposons que Σ_1 coupe T'_2 et soit H l'ensemble de leurs points communs. Soit d'autre part θ l'écart de T_2 avec T'_2. Par des raisonnements analogues à ceux des

nos **31** et suivants, je peux prouver que : 1° il existe un nombre η tel que, si M_1, M_2 sont deux points de Σ_1 distants de moins de η, on peut les joindre sur Σ_1 par un chemin intérieur à une sphère de diamètre θ; 2° il existe un nombre ε tel que toute courbe J dont chaque point a avec H un écart inférieur à ε peut être amenée sur Σ_1 par une déformation au cours de laquelle chacun de ses points garde avec H un écart inférieur à θ. Au cours de cette déformation, on ne rencontrera donc pas T_2 et l'on restera à l'extérieur de T_2. Donc le coefficient d'enlacement de J avec C_2 ne change pas. Mais on arrive à une courbe tracée sur Σ_1 et extérieure à T_2, donc non enlacée avec C_2. Par suite, toute courbe telle que J n'est pas enlacée avec C_2.

ε étant ainsi déterminé, pavons l'espace à l'aide de cubes de diamètre inférieur à ε et gardons ceux de ces cubes qui touchent H. Ils forment des domaines D et *toute courbe de* D *est non enlacée avec* C_2. Je supposerai D choisi de façon que sa frontière coupe T'_2 suivant un nombre fini de courbes I sans point multiple et sans point commun (n° **30**). Les courbes I existent, sans quoi un méridien de T'_2 serait intérieur à D, ce qui est impossible puisqu'il est enlacé avec C_2. *Les courbes* I *ne touchent pas* H, *donc* Σ_1, *et ne sont pas enlacées avec* C_2. Leur coefficient d'enlacement avec l'axe de T_2 est donc 0 ou 1. Si ce coefficient est 1 pour l'une d'elles, cette courbe sera la courbe cherchée.

Supposons que ce coefficient soit 0 pour toutes les courbes I. Si je fais la représentation de T'_2 sur un plan H (n° **39**), les représentations de ces courbes sont des courbes fermées i. Un raisonnement analogue à celui du n° **50** montre alors que la région de H extérieure à toutes les courbes i représente des points n'appartenant pas à D. Traçons alors un segment de droite ab représentant un parallèle, a et b étant dans cette région. Les diverses représentations d'une courbe I particulière découpent ab en tronçons : considérons ceux de ces tronçons intérieurs aux représentations de I et reportons-les sur toutes les représentations de I. Il y en a un dont les extrémités sont consécutives sur i, soit $a_1 b_1$. a_1 b_1 et l'arc $a_1 b_1$ de i délimitent alors une région de H représentant de façon biunivoque une portion de T'_2 (n° **42**). Je peux alors rem-

placer un segment un peu supérieur à $a_1 b_1$ par un arc très voisin de l'arc $a_1 b_1$ de i et extérieur à i de façon que le nouvel arc ab représente encore une courbe sans point multiple non enlacée avec C_2 et enlacée avec l'axe de T'_2. Je ferai de même pour les tronçons du type de $a_1 b_1$ qui apparaissent alors obligatoirement et ceci jusqu'à ne plus avoir de points intérieurs aux représentations de la courbe I envisagée. Je fais de même pour chacune des courbes I. La courbe obtenue finalement représente une courbe ne touchant pas D, donc ne touchant pas Σ_1. Cette courbe n'est pas enlacée avec C_2 et est enlacée avec l'axe de T'_2. C'est donc la courbe que je cherche sur T'_2. Le lemme est ainsi démontré.

Remarquons que, dans la démonstration, j'avais seulement fait intervenir la condition qu'il n'existait pas de courbe L_2 *dans le voisinage de* T'_2. J'amenais en effet la courbe J sur Σ_1, chaque point de J ayant toujours un écart inférieur à θ avec H. Donc, non seulement L_2 existe, mais encore il existe des courbes L_2 intérieures à T_1.

88. Le lemme précédent peut être complété ainsi : *Non seulement* L_2 *existe, mais il existe une autre courbe* L'_2 *ayant la même propriété, les deux calottes* Σ_2, Σ'_2 *découpées par ces courbes dans* Σ_1 *n'ayant pas de point commun.*

Au cours de la démonstration de cette proposition, j'introduirai un certain nombre de courbes fermées tracées sur Σ_1. J'appellerai *intérieur de l'une de ces courbes*, la calotte simplement connexe qu'elle découpe dans Σ_1 et *extérieur* le reste de Σ_1. Ces dénominations s'appliqueraient, en somme, à une représentation de Σ_1 sur un cercle. D'un autre côté, j'associerai à chaque tore T_2 d'ordre 2, deux tores parallèles et extérieurs, l'un Q_2 à la distance θ de T_2, l'autre R_2 à la distance 2θ. θ est supposé assez petit pour que les tores R_2 (et par suite les tores Q_2) forment à l'intérieur de T_1 une chaîne analogue à la chaîne des tores T_2.

Nous avons vu que nous pouvions choisir L_2 aussi voisin qu'on veut de l'un des tores T_2. Je choisirai cette courbe assez voisine de l'un des tores T_2 pour qu'elle soit extérieure à tous les tores T_2. Je prends alors θ inférieur à la moitié de l'écart de L_2 et des tores T_2.

Je construis une surface polyédrale S_1, voisine de Σ_1, et lui correspondant, les points homologues de S_1 et Σ_1 ayant toujours un écart inférieur à θ. Je choisis cette surface de façon qu'aucune de ses arêtes ni de ses faces ne soit tangente aux tores Q_2 et qu'aucun sommet ne soit sur ces tores. Dans ces conditions, l'intersection de S_1 et des tores Q_2 a pour homologue sur Σ_1 un nombre fini de courbes sans point multiple et sans point commun. Aucune de ces courbes ne coupe L_2 et si l'une d'elles correspond à l'intersection de S_1 et d'un certain tore Q_2, elle est extérieure au tore T_2 correspondant et intérieure au tore R_2.

Parmi ces courbes, il peut y en avoir qui ont L_2 à leur intérieur. Dans ce cas, il y en a une F qui les contient toutes. J'appelle Σ' l'extérieur de F (l'extérieur de L_2, si F n'existe pas). Je désignerai par G une quelconque des courbes restantes, situées sur Σ'. *Si l'une des courbes* G *est enlacée avec une des circonférences* C_2, *ce sera la courbe* L'_2 *cherchée*. Nous allons montrer qu'en supposant que chacune des courbes G n'est enlacée avec aucune des circonférences C_2, nous arrivons à une contradiction, ce qui prouvera l'existence de L'_2.

Supposons qu'il en soit ainsi. *La partie d'un seul tenant de* Σ', *extérieure aux courbes* G, *ne contient aucun point des courbes* C_2. Cette partie est, en effet, tout entière extérieure aux tores T_2 : Un point de T_2 est à une distance de Q_2 égale à θ, donc son homologue sur S_1 est intérieur à Q_2 ; on ne peut atteindre ce point sur S_1, à partir d'un point de l'homologue de L_1, qu'en traversant le tore Q_2 ; donc on ne peut atteindre un point de T_2, à partir de L_2, sur Σ_1, qu'en traversant une courbe G. Les frontières L_1 et G de cette partie de Σ' ne sont pas enlacées avec les courbes C_2. Donc le reste de sa frontière F n'est enlacé avec aucune des courbes C_2. Ceci prouve déjà que F n'est pas la courbe L_2 qui est enlacée avec une des courbes C_2.

Soit J *une courbe tracée sur* Σ' *et extérieure à l'un des tores* R_2. *Je dis qu'elle n'est pas enlacée avec la circonférence* C_2 *que contient* R_2. J étant extérieure à R_2 ne coupe aucune des courbes G qui proviennent du tore Q_2 intérieur à R_2. La portion de Σ' intérieure à J et extérieure à ces courbes G particulières est donc extérieure à T_2

et par suite ne contient aucun point de la circonférence C_2 intérieure à R_2. Les courbes G faisant partie de sa frontière ne sont pas enlacées avec C_2, de même que F (dans le cas où F ferait aussi partie de cette frontière). Donc le reste de cette frontière, c'est-à-dire J, n'est pas enlacé avec cette circonférence C_2.

Ceci étant, je peux appliquer à Σ' et aux tores R_2 les raisonnements faits au n° **87** sur Σ_1 et les tores T_2. Il existe sur chaque tore R_2 une courbe ne coupan pas Σ', enlacée avec l'axe de R_2 et non enlacée avec la courbe C_2 que contient R_2. Des déformations n'altérant que le voisinage des tores R_2 permettent de prendre pour ces courbes un parallèle C'_2 sur chaque tore R_2, Σ' étant transformée en une autre surface que j'appelle encore Σ', ayant pour frontière la courbe L_1 et une courbe que j'appelle encore F, qui est intérieure à l'un des tores R_2, tore que je désignerai par R. J'appellerai de même C' le parallèle C'_2 pris sur ce tore et je supposerai que c'est le cercle de gorge de R.

Les courbes C'_2 forment à l'intérieur de T_1 une chaîne analogue à la chaîne des courbes C_2. Σ' a un écart non nul avec ces courbes. On peut déterminer un nombre ε tel que toute courbe dont chaque point a, avec Σ', un écart inférieur à ε peut être amené sur Σ' sans couper aucune des courbes C'_2. Mais toute courbe tracée sur Σ' se ramène à zéro, ou à L_1, donc n'est enlacée avec aucune des courbes C'_2. *On peut donc enfermer Σ' dans un domaine polyédral non enlacé avec les courbes C'_2.*

Grâce à ce domaine polyédral, je peux, comme aux n^{os} **80** et **81**, construire une courbe α ne coupant pas Σ', intérieure à T_1 et enlacée avec l'axe de T_1, donc avec L_1. Prenons une précaution pour construire une partie de α. Soient A, B les deux points de rencontre avec le cercle limité par C' (relatif au tore particulier R qui contient F) des deux courbes C'_2 enlacées avec C'. Pour former α, je prendrai d'abord une ligne polygonale joignant AB sans couper Σ' et intérieure au cercle limité par C'. Comme arcs des courbes C'_2 enlacées avec C', je prendrai deux arcs qui, au voisinage de A et B sont du même côté du plan de C'. Grâce à cette précaution, je peux réduire R à un point sans couper α. Il en est de même de F, intérieur à R. Donc F n'est pas enlacée avec α.

La contradiction cherchée réside dans le fait que α ne coupe pas Σ', n'est pas enlacée avec F et est enlacée avec L_1.

L'_2 *existe donc et peut être prise* parmi les courbes G, donc est, *comme* L_2, *intérieur à* T_1.

89. Appelons *courbe d'ordre* 1, la courbe L_1 et courbes d'ordre 2, les deux courbes L_2, L'_2 qui viennent d'être mises en évidence. L_2 joue par rapport à un tore d'ordre 2 le rôle que joue L_1 par rapport au tore d'ordre 1. Je peux donc construire à l'intérieur de L_2 deux courbes L_3, L'_3 (courbes d'ordre 3) extérieures l'une à l'autre, intérieures à un tore d'ordre 2 et jouant chacune par rapport à un tore d'ordre 3 le rôle de L_1 par rapport à T_1. Je fais de même pour L_2 et je continue ces opérations indéfiniment.

L'infinité dénombrable des courbes L *satisfait, par construction aux conditions a et b'* du n° **75** : toutes les courbes d'ordre λ sont extérieures les unes aux autres; à l'intérieur d'une courbe d'ordre λ il y a deux courbes d'ordre $\lambda+1$ et chaque courbe d'ordre $\lambda+1$ est intérieure à une courbe d'ordre λ. De plus, une courbe d'ordre λ est intérieure à un tore d'ordre $\lambda-1$, donc le diamètre maximum des courbes d'ordre λ tend vers zéro quand λ augmente indéfiniment (*condition c*). En prenant l'intermédiaire d'une représentation de Σ_1 sur un cercle, on en déduit que les courbes L définissent sur Σ_1 un *ensemble parfait partout discontinu* P' qui est l'ensemble des points de Σ_1 intérieures à une infinité des courbes L.

Je dis que P' *appartient à* P. En effet, un point M de P' est intérieur à une suite de courbes L comprenant une courbe et une seule de chaque ordre. C'est le point limite unique d'une suite de points pris un et un seul sur chacune des courbes de la suite précédente. Or le point pris sur la courbe d'ordre λ est intérieur à un tore d'ordre $\lambda-1$. Donc M est un point de P.

Il en résulte que, non seulement P et Σ_1 se coupent, mais que, *parmi les points communs à* P *et à* Σ_1, *il y en a formant un ensemble parfait, donc non dénombrable.*

90. Comme courbe L_1 nous pouvons prendre un méridien ou un parallèle d'un des tores de définition de P. Si nous considérons l'arc

de Jordan Γ qui contient P (arc que je peux supposer ne pas couper L_1), *toute calotte simplement connexe sans point multiple ayant* L_1 *pour frontière coupe* Γ *et parmi les points d'intersection, il y en a une infinité non dénombrable appartenant à l'ensemble* P.

C'est un fait de même nature que celui démontré au n° **61**. Nous avons cependant ici cette circonstance plus paradoxale que la courbe Γ (qui joue le rôle de la courbe C_2 du n° **61**) est une courbe ouverte et que parmi les points d'intersection, il y en a une infinité non dénombrable appartenant à un ensemble discontinu *particulier* situé sur Γ.

Integral solutions of the equation $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$ in the quadratic realms of rationality;

By Harris HANCOCK.

One of the simplest Diophantine équations is $x^2 + y^2 = z^2$.

The solution of this equation gives the so called Pythagorean numbers $x = 2pql$, $y = (p^2 - q^2)l$, $z = (p^2 + q^2)l$, where p, q, l are rational intégers such that $p > q > 0$, $l > 0$ with the further condition that p and q are relatively prime and both must not be odd.

For exemple,

$$p = 2, \quad q = 1, \quad x = 4, \quad y = 3, \quad z = 5, \quad 5^2 = 4^2 + 3^2,$$
$$p = 5, \quad q = 4, \quad x = 40, \quad y = 9, \quad z = 41, \quad 41^2 = 40^2 + 9^2, \text{ etc.}$$

A treatment of such problems in the realm of natural integrals is found in the second volume of Dickson's admirable *History of the Theory of Numbers*. As every problem, whose history is given by Dickson, admits a generalized treatment in the algebraic realms of the second, third and higher degrees, it is seen that a vast field of further investigation is open to Mathematicians. And by developing this algebraic number-theory new light may be thrown upon the theory of algebraic equations.

By definition a quadratic algebraic integer is the root of the equation $t^2 + \mathrm{A}t + \mathrm{B} = 0$, where A and B are rational integers and the coefficient of t^2 is unity.

Let

$$\xi = a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2}, \qquad \eta = b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2}, \qquad \zeta = c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_2}$$

be three quadratic algebraic integers, being respectively the roots of

$$x^2 - 2a_1x - a_2 = 0, \qquad y^2 - 2b_1y - b_2 = 0, \qquad z^2 - 2c_1z - c_2 = 0,$$

where a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 are arbitrary rational integers.

If then $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$, it follows that

$$(\mathrm{I}) \qquad 2a_1\xi + a_2 + 2b_1\eta + b_2 = 2c_1\zeta + c_2,$$

or

$$(\mathrm{I}^a) \qquad 2a_1^2 + a_2 + 2a_1\sqrt{a_1^2 + a_2} + 2b_1^2 + b_2 + 2b_1\sqrt{b_1^2 + b_2}$$
$$= 2c_1^2 + c_2 + 2c_1\sqrt{c_1^2 + c_2}.$$

Our problem is to solve this latter equation in integral values of a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2.

First let $a_1 = 0$. It follows that

$$(\mathrm{II}) \qquad a_2 + 2b_1^2 + b_2 = 2c_1^2 + c_2,$$

$$(\mathrm{III}) \qquad b_1\sqrt{b_1^2 + b_2} = c_1\sqrt{c_1^2 + c_2}.$$

Writing (III) in the form

$$(\mathrm{IV}) \qquad b_1^4 - c_1^4 = c_1^2c_2 - b_1^2b_2,$$

it is seen that b_1, c_1, may be taken at pleasure and c_2, b_2 so chosen as to satisfy (IV). Then from (II) a_2 is determined.

For example let $b_1 = 4$, $c_1 = 3$, then is $b_2 = -700$, $c_2 = -1225$ and $a_2 = -539$. And that is, if η is a root of $y^2 - 8y + 700 = 0$ and ζ a root ov $z^2 - 6z + 1225$, then $\eta^2 = \zeta^2 + 539$. See *Diophantus* II, 11; *Dickson* II, p. 402.

Next observe that from (I^a) follow the two equations

$$(1) \qquad 2a_1^2 + a_2 + 2b_1^2 + b_2 = 2c_1^2 + c_2,$$

$$(2) \qquad a_1\sqrt{a_1^2 + a_2} + b_1\sqrt{b_1^2 + b_2} = c_1\sqrt{c_1^2 + c_2},$$

That these equations admit solution is seen at once if we put

$$a_1 = b_1 = c_1; \qquad c_2 = 2a_1^2 + a_2 + b_2, \qquad a_2 = b_2 = -\frac{a_1^2}{2}.$$

For it is evident that if ξ, η, ζ are respectively the roots of

$$x^2 - 2a_1 x + \frac{a_1^2}{2} = 0, \qquad y^2 - 2a_1 y + \frac{a_1^2}{2} = 0, \qquad z^2 - 2a_1 z - a_1^2 = 0,$$

that $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$.

Note that a_1 must be an even integer in order that ξ and η be algebraic integers.

For example,

$$x^2 - 4x + 2 = 0, \qquad y^2 - 4y + 2 = 0, \qquad z^2 - 4z - 4 = 0,$$

have roots

$$\xi = \eta = 2 + \sqrt{2}, \qquad \zeta = 2 + 2\sqrt{2}$$

such that

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2.$$

A solution of (1) and (2) is had as follows:

Put

$$\sqrt{b_1^2 + b_2} = m\sqrt{a_1^2 + a_2}. \tag{3}$$

where m is a rational integer to be determined.

We have at once

$$c_1 = a_1 + mb_1 \quad \text{and} \quad \sqrt{a_1^2 + a_2} = \sqrt{c_1^2 + c_2}. \tag{4}$$

In the latter expression put for c_1 its value so that

$$\sqrt{a_1^2 + a_2} = \sqrt{(a_1 + mb_1)^2 + c_2} = \sqrt{a_1^2 + 2a_1 mb_1 + m^2 b_1^2 + c_2}$$

and regarding a_2 fixed, make c_2 satisfy the relation

$$a_2 = 2a_1 mb_1 + m^2 b_1^2 + c_2. \tag{5}$$

This expression may be simplified by observing from (1) that

$$a_2 + 2b_1^2 + b_2 = 4a_1 mb_1 + 2m^2 b_1^2 + c_2. \tag{6}$$

From (5) and (6) it is seen that

$$2b_1^2 + b_2 = a_2 - c_2, \tag{7}$$

and also that

$$m^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 m = 2b_1^2 + b_2. \tag{8}$$

The latter equation in m may be satisfied in an infinite number of ways. For let $2a_1 = 3mb_1$, thus making a perfect square on the left hand side and put respectively $b_2 = 2b_1^2$, $= 14b_1^2$, $= 34b_1^2$, $= 62b_1^2$, etc.

It is seen that m may take the values 1, 2, 3, 4, ...

For example let $m = 2$, so that $a_1 = 3b_1$, $b_2 = 14b_1^2$. From (3) it follows that $b_1^2 + b_2 = m^2(a_1^2 + a_2)$, or $-21b_1^2 = 4a_2$, an expression which offers an infinite number of values of a_2 and b_1. Write $b_1 = 2$, $a_2 = -21$, $a_1 = 6$, $b_2 = 56$. From (4) and (5) it is seen that $c_1 = 10$ and $c_2 = -85$.

It is thus shown that the roots of

$$x^2 - 12x + 21 = 0, \qquad y^2 - 4y - 56 = 0, \qquad z^2 - 20z + 85 = 0,$$

are

$$\xi = 6 + \sqrt{15}, \qquad \eta = 2 + 2\sqrt{15}, \qquad \zeta = 10 + \sqrt{15}$$

and that

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2.$$

A second method. — Write as above

$$x^2 - 2a_1x + a_2 = 0, \qquad y^2 - 2b_1y - b_2 = 0, \qquad z^2 - 2c_1z - c_2 = 0$$

with roots, the algebraic integers,

$$\xi = a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2}, \qquad \eta = b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2}, \qquad \zeta = c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_2}.$$

Put

$$\eta = m\xi + n,$$

so that

$$\eta^2 = m^2\xi^2 + 2mn\xi + n^2.$$

It follows that

$$2b_1\eta + b_2 = m^2(2a_1\xi + a_2) + 2mn\xi + n^2,$$

or

$$2b_1m\xi + 2b_1n + b_2 = 2a_1m^2\xi + a_2m^2 + 2mn\xi + n^2.$$

It is clear from this last expression that

(1) $$b_1 = ma_1 + n,$$

(2) $$2b_1n + b_2 = m^2a_2 + n^2.$$

If n is eliminated from these equation we have

(i) $$b_1^2 + b_2 = m^2(a_1^2 + a_2).$$

From equation (1), it follows that

$$2a_1\zeta + a_2 + 2b_1 m\zeta + 2b_1 n + b_2 = 2c_1\zeta + c_2.$$

If the rational and irrational part of this expression are equated, it is seen that

$$(3) \qquad a_1 + mb_1 = c_1,$$

$$(4) \qquad 2a_1^2 + a_2 + 2b_1 ma_1 + 2b_1 n + b_2 = 2c_1^2 + c_2.$$

Eliminate n from (4) by means of (1), we have equation (ii) above

$$(ii) \qquad a_2 + 2b_1^2 + b_2 = 4a_1 mb_1 + 2m^2 b_1^2 + c_2.$$

Noting that the relation

$$\sqrt{a_1^2 + a_2} = \sqrt{c_1^2 + c_2} = \sqrt{(a_1 + mb_1)^2 + c_2}$$

must be satisfied, it is seen that

$$(5) \qquad a_2 = 2a_1 mb_1 + m^2 b_1^2 + c_2.$$

From (ii) and (5) the quantities $a_2 - c_2$ and m may be respectively eliminated, and the following equations take their places

$$(4^a) \qquad 2b_1^2 + b_2 = m^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 m,$$

$$(5^a) \qquad 2b_1^2 + b_2 = a_2 - c_2.$$

If as in the previous solution, we put in (4^a) the values $2a_1 = 3b_1 m$, $b_2 = 14b_1^2$, we have $16b_1^2 = 4m^2 b_1^2$, or $m = 2$, $2a_1 = 6b_1$. From (1) $n = -5b_1$ and from (2) $-21b_1^2 = 4a_2$. Put $b_1 = 2$, $a_2 = -21$, $a_1 = 6$, $b_2 = 56$. From (3) and (5^a) it is seen that $c_1 = 10$ and $c_2 = -85$. Observe, however, that equations (1), (2) et (4) may by eliminating n be replaced by

$$b_1^2 + b_2 = m^2(a_1^2 + a_2)$$

and

$$a_2 + 2b_1^2 + b_2 = 4a_1 mb_1 + 2m_1^2 b_1^2 + c_2;$$

and it is seen that this solution is only a different form of the preceding one.

A more general solution. — Writing as in the preceding method

$$\eta = m\zeta + n,$$

we have

(1) $$b_1 = mc_1 + n$$

and

(2) $$2b_1 n + b_2 = m^2 c_2 + n^2.$$

Again note if n is eliminated from (1) and (2), that

$$b_1^2 + b_2 = m^2(c_1^2 + c_2).$$

Further write $\xi = p\zeta + q$ and it follows that

(3) $$a_1 = pc_1 + q$$

and

(4) $$2a_1 q + a_2 = p^2 c_2 + q^2.$$

If q is eliminated from these latter equations, we have

$$a_1^2 + a_2 = p^2(c_1^2 + c_2).$$

The above values substituted in (1) cause that equation to become

$$2a_1(p\zeta + q) + a_2 + 2b_1(m\zeta + n) + b_2 = 2c_1\zeta + c_2.$$

In this expression equate the real parts and also the imaginary parts and it is seen that

(5) $$c_1 = pa_1 + mb_1,$$
$$2pa_1c_1 + 2mb_1c_1 + 2a_1q + 2b_1n + a_2 + b_2 = c_2 + 2c_1^2.$$

Due to (5) the last equation becomes

(6) $$2a_1q + 2b_1n + a_2 + b_2 = c_2.$$

From (1), (3) and (5) it is seen that

(7) $$c_1 = \frac{mn + pq}{1 - m^2 - p^2};$$

and from (2), (4) and (6)

(8) $$c_2 = \frac{n^2 + q^2}{1 - m^2 - p^2}.$$

A solution of (7) and (8) is had, if we put

$$n = k(1 - m^2 - p^2) \qquad \text{and} \qquad q = l(1 - m^2 - p^2),$$

where k and l are arbitrary integers.

It follows that

$$c_1 = mk + pl,$$
$$c_2 = (k^2 + l^2)\mathrm{H}, \qquad \text{where} \qquad \mathrm{H} = 1 - m^2 - p^2.$$

From (1) and (3) we have

$$b_1 = k + p(ml - pk),$$
$$a_1 = l + m(pk - ml);$$

and from (2) and (4)

$$b_2 = [(ml - pk)^2 - k^2]\mathrm{H},$$
$$a_2 = [(pk - ml)^2 - l^2]\mathrm{H}.$$

Further note that

$$c_1^2 + c_2 = l^2 + k^2 - (kp - lm)^2,$$
$$a_1^2 + a_2 = p^2(c_1^2 + c_2), \qquad b_1^2 + b_2 = m^2(c_1^2 + c_2).$$

For example, let $l = 2$, $k = 3$, $p = 5$, $m = 7$.

It is seen that

$$c_1^2 + c_2 = 12, \qquad a_1^2 + a_2 = 5^2.12, \qquad b_1^2 + b_2 = 7^2.12,$$
$$c_1 = 31, \qquad a_1 = 9, \qquad b_1 = -2,$$
$$\zeta = 3 + 2\sqrt{3}, \qquad \xi = q + 10\sqrt{3}, \qquad \eta = -2 + 14\sqrt{3},$$

where $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$.

Again put

$$m = 3, \qquad l = 1, \qquad p = 2, \qquad k = 5,$$

and we have

$$\xi = 22, + 2i\sqrt{23}, \qquad \eta = 9 + 3i\sqrt{23}, \qquad \zeta = 17 + i\sqrt{23},$$
$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2.$$

Finally make $c_1^2 + c_2$ a perfect square, and we have the Pythagorean numbers. For example, let

$$m = 5, \qquad l = 2, \qquad p = 3, \qquad k = 4,$$

and we have

$$c_1^2 + c_2 = 16, \qquad c_1 = 26, \qquad \zeta = 26 + 4 = 30,$$
$$a_1^2 + a_2 = 3^2 . 16, \qquad a_1 = 12, \qquad \xi = 12 + 12 = 24,$$
$$b_1^2 + b_2 = 5^2 . 16, \qquad b_1 = -2, \qquad \eta = -2 + 20 = 18,$$
$$\xi^2 + \eta^2 = 900 = \zeta^2.$$

The quadratic realms of rationality.

We are now in a position to express the above results in a more definite form, which is done through proof of the following theorem:

In every quadratic realm there is an infinite number of solutions of the equation

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$$

through algebraic integers.

It is well known that any quadratic integer may be expressed in the form $a.1 + b.\omega$, where a and b are any two rational integers and where $1, \omega$ form the *basis* of the realm, say $R(\sqrt{t})$, t any integer. If $t \equiv 2 \pmod 4$ or $t \equiv 3 \pmod 4$, then is $\omega = \sqrt{t}$; if, however, $t \equiv 1 \pmod 4$, then is $\omega = \frac{1+\sqrt{t}}{2}$. The case where t contains a squared factor may be reduced to one or the other of the above cases, so that it is unnecessary to consider the case $m \equiv 0 \pmod 4$. As the present paper is concerned particularly with the *existence* of such solutions as have been indicated, it is seen that the solutions of the second case necessarily imply those of the first case; for if

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2,$$

then necessarily

$$(2\xi)^2 + (2\eta)^2 = (2\zeta)^2.$$

We may therefore consider here only the first case: If

$$\xi = m_1 + m\sqrt{t},$$

where m_1 and m are any rational integers and if ξ satisfies the equation

$$x^2 - 2a_1 x - a_2 = 0,$$

where a_1, a_2 are arbitrary rational integers, we have

$$m_1^2 + 2mm_1\sqrt{t} + m^2 t = 2a_1 m_1 + 2a_1 m\sqrt{t} + a_2.$$

It follows that

$$m_1 = a_1 \quad \text{and} \quad m^2 t = a_1^2 + a_2.$$

Similarly if η and ζ are roots of the two equations

$$y^2 - 2b_1 y - b_2 = 0 \quad \text{and} \quad z^2 - 2c_1 z - c_2 = 0,$$

we have

$$\xi = a_1 + mt^{\frac{1}{2}},$$

$$\eta = b_1 + nt^{\frac{1}{2}},$$

where n like m is an arbitrary integer,

$$\zeta = c_1 + pt^{\frac{1}{2}},$$

p being likewise any rational integer; with the conditions

$$m^2 t = a_1^2 + a_2, \qquad n^2 t = b_1^2 + b_2, \qquad p^2 t = c_1^2 + c_2.$$

Writing their values in equation (I) namely

$$2a_1\xi + a_2 + 2b_1\eta + b_2 = 2c_1\zeta + c_2,$$

it is seen that

$$2a_1^2 + a_2 + 2a_1 m\sqrt{t} + 2b_1^2 + b_2 + 2b_1 n\sqrt{t} = 2c_1^2 + c_2 + 2c_1 p\sqrt{t}.$$

Equating the rational and irrational terms in this expression, we have the following equations to solve

(1) $$2a_1^2 + a_2 + 2b_1^2 + b_2 = 2c_1^2 + c_2,$$

(2) $$a_1 m + b_1 n = c_1 p,$$

(3) $$m^2 t = a_1^2 + a_2,$$

(4) $$n^2 t = b_1^2 + b_2,$$

(5) $$p^2 t = c_1^2 + c_2.$$

From (1), (3), (4) and (5) it follows that

$$2(m^2 + n^2 - p^2)t = a_2 + b_2 - c_2;$$

or, what is the same thing,

$$(6) \qquad (m^2+n^2-p^2)t = c_1^2 - a_1^2 - b_1^2,$$

Eliminate respectively a_1, b_1, c_1, between (1) and (2) after (1) has been put in the form

$$a_1^2 + b_1^2 + (m^2+n^2)t = c_1^2 + p^2 t,$$

and we have

$$(7) \qquad p^2\,(m^2+n^2-p^2)t = (a_1 m + b_1 n)^2 - p^2(a_1^2+b_1^2).$$

$$(8) \qquad n^2\,(m^2+n^2-p^2)t = n^2(c_1^2-a_1^2) - (c_1 p - a_1 m)^2.$$

$$(9) \qquad m^2(m^2+n^2-p^2)t = m^2(c_1^2-b_1^2) - (c_1 p - b_1 n)^2.$$

Note that if we put

$$m^2+n^2 = p^2,$$

in these equations, we have

$$\frac{a_1}{m} = \frac{b_1}{n} = \frac{c_1}{p}.$$

If then Pythagorean numbers are chosen for m, n, p, the same are had for a_1, b_1, c_1, and from (6) the number t is indeterminate.

Observe that equations (2) are satisfied if we put

$$m = ka_1, \qquad n = kb_1, \qquad p = kc_1 \qquad (k \text{ any rational integer})$$

and choose for a_1, b_1, c_1 any Pythagorean numbers π_1, π_2, π_3, $\pi_1^2 + \pi_2^2 = \pi_3^2$. For example, in any realm of nationality $R(\sqrt{t})$, it is evident that the algebraic integers

$$\xi = \pi_1 + k\pi_1\sqrt{t}, \qquad \eta = \pi_2 + k\pi_2\sqrt{t}, \qquad \zeta = \pi_3 + k\pi_3\sqrt{t}$$

satisfy the equation

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2.$$

The theorem has resolved itself in the solution of the equation

$$(6) \qquad (m^2+n^2-p^2)t = c_1^2 - a_1^2 - b_1^2,$$

subject to the condition

$$(2) \qquad a_1 m + b_1 n = c_1 p.$$

One method of procedure is the following :

The integer t being fixed, give to m, n, p fixed values and put

$$p^2 - m^2 - n^2 = k,$$

where k is constant.

From (6), it is seen that

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = t.k.$$

If c_1 is eliminated from this latter equation and (2), we have

$$(\mathrm{II}) \qquad (p^2 - m^2)a_1^2 - 2mna_1b_1 + (p^2 - n^2)b_1^2 = p^2tk,$$

which equation is a quadratic form in the two unknown quantities a_1, b_1, whose discriminant D is $-p^2k$.

The problem has now resolved itself into the solution of the quadratic form (II) with negative, zero or positive, discriminant.

1° If k is positive the discriminant is negative. In this case multiply (II) by $4(p^2 - m^2)$ and put

$$(i) \qquad 2(p^2 - m^2)a_1 - 2mnb_1 = s.$$

It is seen that (II) becomes

$$s^2 + 4p^2kb_1^2 = 4(p^2 - m^2)tkp^2,$$

or

$$(ii) \qquad s^2 = 4kp^2[(p^2 - m^2)t - b_1^2].$$

Hence through a finite number of trials, we may determine whither or not there is a value fur b_1 which makes the right hand side of (ii) a perfect square — a condition witch is evidently necessary for the solution of the problem.

For example write $p = 3$, $m = 2$, $n = 1$, so that $k = 4$. Take $t = 5$. From (ii) it is seen that, when

$$(a) \qquad b_1 = 0, \qquad s = 4.3.5;$$
$$(b) \qquad b_1 = 3, \qquad s = 4.3.4;$$
$$(c) \qquad b_1 = 4, \qquad s = 4.3.3;$$
$$(d) \qquad b_1 = 5, \qquad s = 0.$$

Hence from (i) and (2), we have

(a) $\qquad a_1 = 6, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 4;$

(b) $\qquad a_1 = 6, \quad b_1 = 3, \quad c_1 = 5;$

(c) $\qquad$ *no solution:*

(d) $\qquad a_1 = 2, \quad b_1 = 5, \quad c_1 = 3.$

It is also evident from (ii) that negative values may be given to b_1 and s so that, for example, $b_1 = -3$, $s = -4.3.4$.

In this case $a_1 = -b_1$, $b_1 = -3$, $c_1 = -4$.

Hence in the realm $R(\sqrt{5})$ if values 2, 1, 3 are taken respectively for m, n, p, it is seen that :

$$(a) \qquad \begin{cases} \xi = \pm 6 + 2\sqrt{5}, \\ \eta = \quad 0 + \sqrt{5}, \\ \zeta = \pm 4 + 3\sqrt{5}; \end{cases}$$

$$(b) \qquad \begin{cases} \xi = \pm 6 + 2\sqrt{5}, \\ \eta = \pm 3 + \sqrt{5}, \\ \zeta = \pm 5 + 3\sqrt{5}; \end{cases}$$

$$(c) \qquad \begin{cases} \xi = \pm 2 + 2\sqrt{5}, \\ \eta = \pm 5 + \sqrt{5}, \\ \zeta = \pm 3 + 3\sqrt{5}; \end{cases}$$

are solutions of the equation

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2.$$

It is evident that if -2, -1, -3 had been chosen respectively at values of m, n, p, the same values of a_1, b_1, c_1 as those above would have been derived.

If we put $m = 1$, $n = 3$, $p = 2$, it is seen that $k = -6$ and $D = +24$. Equation (II) becomes, if t is taken $= 3$,

$$5b_1^2 + 6b_1a_1 - 3a_1^2 = 72.$$

A solution is $a_1 = 3$, $b_1 = 3$, $c_1 = \dfrac{a_1 m + b_1 n}{p} = 6$. The corresponding values of ξ, η, ζ are

$$\xi = 3 + \sqrt{3}, \qquad \eta = 3 + 3\sqrt{3}, \qquad \zeta = 6 + 2\sqrt{3}.$$

If $t = 10$, the equation

$$5b_1^2 + 6b_1a_1 - 3a_1^2 = 240,$$

admits solution $a_1 = 2$, $b_1 = 6$, $c_1 = 10$.

However if $t = 5$, the equation

$$5b_1^2 + 6b_1a_1 - 3a_1^2 = 120$$

does *not* admit solution, as is evident from elementary consideration.

Having *one* solution it is possible by means of the Pell's equation to derive an infinity of others.

In the first case, for example, where $D = 24$, the equation of Pell, namely $T^2 - 24U^2 = 1$, admits the solution $T = 5$, $U = 1$.

Note that the equation

$$5b_1^2 + 6b_1a_1 - 3a_1^2 = 72,$$

may be written in the form

$$(5b_1 + 3a_1)^2 - 24a_1^2 = 5.72.$$

Hence writing

$$5b_1 + 3a_1 + \sqrt{24}a_1 = (24 + 3\sqrt{24})(5 + \sqrt{24})^k,$$

we have the solutions corresponding to values of $k = 1, 2, 3, \ldots$.

If $k = 1$, it is seen that

$$a_1 = 39, \qquad b_1 = 15, \qquad c_1 = 42,$$

and

$$\xi = 39 + \sqrt{3}, \qquad \eta = 15 + 3\sqrt{3}, \qquad \zeta = 42 + 2\sqrt{3}.$$

In the two examples given above it is seen that a_1, b_1, c_1 have a common factor other than unity.

Take, however,

$$m = 3, \qquad n = 2, \qquad p = 1$$

and let

$$t = 22.$$

It is seen that $k = -12$, and the discriminant $D = +12$. Equation (II) becomes

$$8a_1^2 + 12a_1b_1 + 3b_1^2 = 12.22.$$

Note that 12 is a quadratic residue of 12.22, the congruence

$$n^2 \equiv 12 \pmod{12.22}$$

admitting the solution $n = 54$; and observe that

$$a_1 = 3, b_1 = 4$$

is a *proper* solution of the quadratic form, that is, one in which a_1 and b_1 are relativily prime.

The corresponding Pell's equation

$$T^2 - 12U^2 = 1$$

admits the solution

$$T = 7, \qquad U = 2.$$

Write

$$8a_1^2 + 12a_1b_1 + 3b_1^2 = 12.22$$

in the form

$$(8a_1 + 6b_1)^2 - 12b_1^2 = 8.12.22,$$

and it is seen that the general solution is

$$8a_1 + 6b_1 + \sqrt{12}\,b_1 = (48 + 4\sqrt{12})(7 + 2\sqrt{12})^k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

When

$k = 1,$	$a_1 = -\ 39,$	$b_1 = 127,$	$c_1 = 131,$
$k = 2,$	$a_1 = -\ 549,$	$b_1 = 1732,$	$c_1 = 1817,$
$k = 3,$	$a_1 = -\ 7647,$	$b_1 = 24124,$	$c_1 = 25307,$
.....,	.....,	.....	.....

The corresponding values of ξ, η, ζ are

$k = 0,$	$k = 1,$
$\xi = 3 + 3\sqrt{22},$	$\xi = -\ 39 + 3\sqrt{22},$
$\eta = 4 + 2\sqrt{22},$	$\eta = 124 + 2\sqrt{22},$
$\zeta = 17 + \sqrt{22};$	$\zeta = 131 + \sqrt{22};$
$k = 2,$	$k = 3,$
$\xi = -\ 549 + 3\sqrt{22},$	$\xi = -\ 7647 + 3\sqrt{22},$
$\eta = 1732 + 2\sqrt{22},$	$\eta = 24124 + 2\sqrt{22},$
$\zeta = 1817 + \sqrt{22};$	$\zeta = 25307 + \sqrt{22};$
.....,	.....

Note that on the transition from a negative to a positive discriminant we must have

$$D = 0 = -p^2 k.$$

If $k = 0$, whe have the Pythagorean numbers considered above. And if $p = 0$, the quadratic form (II) becomes

$$a_1 m + b_1 n = 0$$

and the further solution is without difficulty.

Généralisation d'un théorème de Tchebycheff;

PAR TRYGVE NAGEL,

à Kristiania (Norvège).

INTRODUCTION.

On doit à Tchebycheff le théorème remarquable que voici ([1]) :

P_x *étant le plus grand nombre premier qui divise le produit*

$$(1+2^2)(1+4^2)(1+6^2)\ldots(1+4x^2),$$

le rapport $\frac{P_x}{x}$ *croît infiniment avec* x.

Après la mort de Tchebycheff, M. A. Markoff a trouvé dans ses manuscrits posthumes une feuille, tout à fait sale et déchirée, où se trouvaient des calculs presque inintelligibles, mais qui l'ont conduit à la démonstration du théorème. Sa démonstration fut publiée dans le *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 1895 ([2]).

Ce résultat a été généralisé par M. G. Pólya, qui a démontré le théorème suivant ([3]) :

([1]) On le trouve annoncé dans les *Cours lithographiés* (4e édition, p. 197) de Hermite.

([2]) Ces renseignements sont tirés du Mémoire de M. C. STÖRMER, *Une application d'un théorème de Tchebycheff* (*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, t. XXIV, Kristiania, 1902).

([3]) G. PÓLYA, *Généralisation d'un théorème de M. Störmer* (*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, t. XXXV, Kristiania, 1917).

En posant pour $n > 2$

$$F_n(x) = \prod_{\varrho} (x - \varrho),$$

où ϱ parcourt les $\varphi(n)$ racines primitives $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, et en désignant par P_x le plus grand facteur premier du produit

$$F_n(1).F_n(2).F_n(3)\ldots F_n(x),$$

on a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{P_x} = 0$$

Dans ce qui suit nous allons démontrer que le théorème de Tchebycheff peut être étendu à *toute fonction rationnelle entière $f(x)$*, irréductible, de degré > 1, à coefficients entiers.

Nous allons, en effet, démontrer le théorème :

En désignant par P_x le plus grand facteur premier du produit

$$f(1).f(2).f(3)\ldots f(x),$$

où $f(x)$ est un polynome entier, irréductible, de degré > 1, on a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x(\log x)^{\varepsilon}}{P_x} = 0,$$

où ε est une quantité quelconque < 1.

Dans les deux premiers paragraphes, nous démontrons quelques lemmes préliminaires : 1° sur le nombre de racines de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha}},$$

où $f(x)$ est un polynome entier, et où p est premier; et 2° sur l'ordre de grandeur de la somme

$$\sum_{p} \nu_p \frac{\log p}{p},$$

qui est étendue à tous les nombres premiers $p \leq x$, et où ν_p désigne le nombre de racines de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Le troisième paragraphe contient la généralisation du théorème de Tchebycheff.

1. Étant donnée la fonction rationnelle, entière de x de degré n à coefficients entiers

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

nous allons ici démontrer quelques théorèmes sur la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha},$$

où p est un nombre premier quelconque. Pour simplifier, nous supposons : 1° que le plus grand commun diviseur des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ soit égal à 1 ; 2° que l'équation $f(x) = 0$ n'ait aucune racine multiple, c'est-à-dire que le discriminant D de $f(x)$ soit différent de zéro. Alors il est bien connu que le nombre de solutions de la congruence

$$(1) \qquad f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

est au plus égal au degré n de $f(x)$, lorsque p est premier. Si x_0 est une racine de la congruence (1), tel que $f'(x_0)$ ne soit pas divisible par p, nous appelons x_0 une *racine simple* de la congruence (1). Si les nombres $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ sont tous les deux divisibles par p, nous appelons x_0 une *racine multiple* de la congruence (1). Dans le dernier cas, nous tirons, en effet, de l'identité [1]

$$(2) \qquad f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \ldots + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

la congruence identique

$$(3) \qquad f(x) \equiv (x - x_0)^2 g(x) \pmod{p},$$

où $g(x)$ est un polynome entier de x de degré $n - 2$. Comme le discriminant D de $f(x)$ est une fonction rationnelle, entière des coefficients de $f(x)$ à coefficients entiers, il resulte de (3) que D est congru au discriminant de $(x - x_0)^2 g(x) \equiv 0 \pmod{p}$; donc :

---

[1] Il est à remarquer que tous les nombres $\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0)$ sont entiers ; car

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = a_0 \binom{n}{r} x_0^{n-r} + a_1 \binom{n-1}{r} x_0^{n-r-1} + \ldots + a_{n-r}.$$

Lemme I. — Si la congruence (1) possède une racine multiple, le discriminant D de $f(x)$ est divisible par p.

Si l'on connaît toutes les racines de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}, \tag{4}$$

on en peut déduire toutes les racines de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+1}}. \tag{5}$$

Toute racine de (5) est de la forme $x_0 + tp^\alpha$, où x_0 parcourt toutes les racines de (4). Cherchons à déterminer l'entier t tel que le nombre $x_0 + tp^\alpha$ soit une racine de (5), x_0 étant une racine de (4). Nous avons

$$f(x_0 + tp^\alpha) = f(x_0) + tp^\alpha . f'(x_0) + t^2 p^{2\alpha} \frac{f''(x_0)}{2!} + \ldots,$$

$$f(x_0 + tp^\alpha) \equiv f(x_0) + tp^\alpha . f'(x_0) \pmod{p^{\alpha+1}}.$$

On aura ainsi à résoudre la congruence

$$f'(x_0)\, t \equiv -\frac{f(x_0)}{p^\alpha} \pmod{p}. \tag{6}$$

Si $f'(x_0)$ n'est pas divisible par p, c'est-à-dire si x_0 est une racine simple de (1), cette congruence a toujours une et une seule racine t. Si $f'(x_0)$ est divisible par p, c'est-à-dire si x_0 est une racine multiple de (1), la congruence (6) a p racines, ou bien elle n'a aucune racine, suivant que $f(x_0)$ est divisible par $p^{\alpha+1}$ ou non. Dans le premier cas, correspondent à toute racine x_0 de (4) les p racines x_0, $x_0 + p^\alpha$, $x_0 + 2p^\alpha, \ldots, x_0 + (p-1)p^\alpha$ de (5).

Nous aurons, par suite, les résultats suivants :

Lemme II. — Soit x_0 une racine simple de la congruence (1). Alors, il y a une et une seule racine de la congruence (4), qui est congrue à $x_0 \pmod{p^\alpha}$.

Lemme III. — Soit x_0 une racine multiple de la congruence (1). Alors, il y a au plus $p^{\alpha-1}$ racines de la congruence (4), qui sont congrues à $x_0 \pmod{p^\alpha}$.

Des lemmes I et II, il résulte :

THEORÈME I. — *Si p est un nombre premier qui ne divise pas le*

discriminant D *de* $f(x)$, *le nombre de racines incongrues de la congruence*

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

est exactement égal à celui de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Supposons ensuite que le nombre premier p divise D; et soit p^μ la plus haute puissance de p qui divise D. Si la congruence (1) n'a aucune racine multiple, le théorème I est encore vrai.

Soit maintenant x_0 une racine de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^{\mu+1}},$$

et de plus une racine multiple de (1). Dans ce cas, le nombre $f'(x_0)$ est au plus divisible par p^μ. Car, si $f'(x_0)$ était divisible par $p^{\mu+1}$, l'identité (2) donnerait la congruence identique

$$f(x) \equiv (x - x_0)^2 g(x) \pmod{p^{\mu+1}},$$

d'où résulterait $D \equiv 0 \pmod{p^{\mu+1}}$, contre l'hypothèse. [D est une fonction rationnelle, entière des coefficients de $f(x)$ à coefficients entiers.]

Si $f'(x_0)$ est divisible par p^β et non par $p^{\beta+1}$, on a donc $\beta \leq \mu$. Il résulte de plus que les nombres $f'(x_0 + tp^{\mu+1})$, pour t entier quelconque, sont divisibles par p^β et non par $p^{\beta+1}$.

Si x_1 est une racine congrue à $x_0 \pmod{p^{\mu+1}}$ de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+\beta}}, \tag{7}$$

où $\alpha \geq \mu + 1$, tous les nombres

$$x_1 + up^\alpha \qquad (u = 0, 1, 2, \ldots, p^\beta - 1) \tag{8}$$

le sont aussi. Car le nombre

$$f(x_1 + up^\alpha) = f(x_1) + up^\alpha f'(x_1) + \frac{1}{2} u^2 p^{2\alpha} f''(x_1) + \ldots$$

est divisible par $p^{\alpha+\beta}$, puisque $f'(x_1) \equiv 0 \pmod{p^\beta}$ et $2\alpha > \alpha + \beta$.

Cherchons les racines de la congruence

$$(9) \qquad f(x) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+\beta+1}},$$

qu'on peut déduire des p^β racines (8) de la congruence (7).

Ces racines sont de la forme $x_1 + up^\alpha + vp^{\alpha+\beta}$. Nous avons

$$f(x_1 + up^\alpha + vp^{\alpha+\beta})$$
$$= f(x_1 + up^\alpha) + vp^{\alpha+\beta}.f'(x_1 + up^\alpha) + \ldots \equiv f(x_1 + up^\alpha) \pmod{p^{\alpha+\beta+1}},$$

vu que

$$f'(x_1 + up^\alpha) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Comme $2\alpha \geqq \alpha + \beta + 1$, nous aurons

$$f(x_1 + up^\alpha) \equiv f(x_1) + up^\alpha.f'(x_1) \pmod{p^{\alpha+\beta+1}}.$$

Nous aurons donc à résoudre la congruence

$$f(x_1) + up^\alpha.f'(x_1) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+\beta+1}}.$$

La congruence

$$\frac{f(x_1)}{p^{\alpha+\beta}} \equiv -u\frac{f'(x_1)}{p^\beta} \pmod{p}$$

possède toujours une et une seule racine, soit u_0, puisque $f'(x_1)$ n'est pas divisible par $p^{\beta+1}$. Nous obtenons ainsi en partant des p^β racines (8) de la congruence (7), les p^β racines suivantes de la congruence (9) :

$$(10) \qquad x_1 + (u_0 + hp)p^\alpha + vp^{\alpha+\beta},$$

où $h = 0, 1, 2, \ldots, p^{\beta-1} - 1$, et où $v = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$, et *pas d'autres racines*.

En posant $x_1 + u_0 p^\alpha = x'_1$, le système (10) est équivalent à

$$(10') \qquad x'_1 + lp^{\alpha-1},$$

où $l = 0, 1, 2, \ldots, p^\beta - 1$.

Il résulte de là, lorsque x_1 parcourt toutes les racines de (7), qui sont congrues à $x_0 \pmod{p^{\mu+1}}$: Le nombre de racines congrues à $x_0 \pmod{p^{\mu+1}}$ de la congruence (7) est indépendant de α, lorsque $\alpha \leqq \mu + 1$.

A toute valeur de x_0 correspond une valeur déterminée de β, qui est $\leqq \mu$. Par conséquent, nous pouvons tirer la conclusion :

La congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^{2+\mu}} \tag{11}$$

possède exactement autant de racines que la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^{2\mu+1}}, \tag{12}$$

quel que soit $\alpha > \mu$.

[Car, de toute racine de (12), qui est une racine simple de (1), se déduit, d'après le lemme II, une et une seule racine de (11).]

Si la congruence (1) possède exactement m racines simples et m_1 racines multiples, le nombre de racines de la congruence (12) est au plus égal à (d'après les lemmes II et III)

$$m + m_1 p^{2\mu} \leq n D^2.$$

Nous avons ainsi démontré :

THÉORÈME II. — *La congruence*

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^2},$$

où p est un facteur premier du discriminant D de $f(x)$, possède au plus nD^2 racines incongrues (¹).

2. Supposons que le corps algébrique $k(\alpha)$ de degré n soit engendré par le nombre α, racine de l'équation $f(x) = 0$, où

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

est une fonction entière, irréductible de x à coefficients entiers.

En prenant pour point de départ la formule connue (²)

$$\sum_{N(\mathfrak{p}) \leq x} \log N(\mathfrak{p}) = x + O(x e^{-c\sqrt{\log x}}), \tag{1}$$

(¹) Notre démonstration de cette proposition se date du 6 février 1921. M. Ore nous a communiqué qu'il a démontré ce théorème déjà au mois de janvier. Sa démonstration va paraître dans *Norsk Matematisk Tidsskrift*, t. 3 (Kristiania, 1921).

(²) Voir M. E. LANDAU, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale* (Leipzig, 1918, p. 109).

où la somme est étendue à tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ du corps $k(\alpha)$ dont la norme ne surpasse pas x, et où c est une constante positive, nous allons d'abord démontrer la formule suivante :

$$(2) \qquad \sum_{N(\mathfrak{p}) \leq x} \frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} = \log x + O(1).$$

Posons, pour abréger,

$$\theta(x) = \sum_{N(\mathfrak{p}) \leq x} \log N(\mathfrak{p}), \qquad \psi(x) = \sum_{N(\mathfrak{p}) \leq x} \frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})}$$

et

$$\eta(x) = \theta(x) - x = O\left(x e^{-c\sqrt{\log x}}\right).$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{m=2}^{x} \frac{\theta(m) - \theta(m-1)}{m} \\
&= \sum_{2}^{x} \frac{1}{m} + \sum_{2}^{x} \frac{1}{m} [\eta(m) - \eta(m-1)] \\
&= \log x + O(1) + \sum_{2}^{x} \eta(m) \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right] - \frac{1}{2}\eta(1) + \frac{\eta(x)}{x+1},
\end{aligned}$$

vu que

$$\sum_{2}^{x} \frac{1}{m} = \log x + O(1).$$

En y introduisant

$$\eta(x) = O\left(x e^{-c\sqrt{\log x}}\right),$$

on aura

$$\psi(x) = \log x + O(1) + O\left(\sum_{2}^{x} \frac{e^{-c\sqrt{\log m}}}{m+1}\right) + O\left(e^{-c\sqrt{\log x}}\right).$$

Or, nous avons pour m_0 suffisamment grand

$$e^{-c\sqrt{\log m}} < \frac{1}{[\log(m+1)]^2}$$

pour tous les $m \geq m_0$. Comme la série $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{m(\log m)^2}$ est convergente,

nous aurons, par suite,

$$\psi(x) = \log x + O(1). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Désignons maintenant par ν_p^r le nombre d'idéaux premiers (différents) de degré r divisant l'idéal principal $[p]$, où p est un nombre premier (rationnel). Si $\mathfrak{p}_r$ désigne un idéal premier de degré r, nous aurons les équations :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\mathfrak{p}_1}^{N\mathfrak{p}_1 \leq x} \frac{\log N(\mathfrak{p}_1)}{N(\mathfrak{p}_1)} = \sum_{p}^{p \leq x} \nu_p^1 \frac{\log p}{p}, \\ \displaystyle\sum_{\mathfrak{p}_2}^{N\mathfrak{p}_2 \leq x} \frac{\log N(\mathfrak{p}_2)}{N(\mathfrak{p}_2)} = \sum_{p}^{p^2 \leq x} 2\nu_p^2 \frac{\log p}{p^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \displaystyle\sum_{\mathfrak{p}_n}^{N\mathfrak{p}_n \leq x} \frac{\log N(\mathfrak{p}_n)}{N(\mathfrak{p}_n)} = \sum_{p}^{p^n \leq x} n\nu_p^n \frac{\log p}{p^n}, \end{array}\right.$$

où les sommes à droite sont étendues à tous les nombres premiers $p \leq x$ (dans la première), $\leq x^{\frac{1}{2}}$ (dans la seconde), etc.

Or, nous avons, pour $r \geq 2$,

$$\sum_{p}^{p^r \leq x} r\nu_p^r \frac{\log p}{p^r} < rn \sum_{p}^{p^r \leq x} \frac{\log p}{p^2} = O(1),$$

puisque la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}$ est convergente.

Par addition, il résulte donc de (3),

$$(3')\qquad \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})} = \sum_{p \leq x} \nu_p^1 \frac{\log p}{p} + O(1).$$

Or, si nous désignons par ν_p le nombre de racines incongrues de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod } p),$$

nous avons d'après Dedekind $\nu_p^1 = \nu_p$, pourvu que p ne soit pas un diviseur « non essentiel » de « l'index » du nombre entier α du corps

$k(\alpha)$ [1]. Comme il n'y a qu'un nombre fini de tels diviseurs « non essentiels », nous pouvons dans la formule (3') remplacer $\nu_p^{(1)}$ par ν_p. En appliquant la formule (2), on aura, par suite, la formule suivante :

$$(4) \qquad \sum_{p}^{p \leq x} \nu_p \frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$

où la somme est étendue à tous les nombres premiers $p \leq x$.

Cette formule est encore valable pour le polynome irréductible

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (a_0 \neq 0).$$

Car, si nous y posons

$$a_0 x = z$$

et

$$g(z) = a_0^{n-1} f(x) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} a_0^{n-2} z + a_n a_0^{n-1},$$

la formule (4) est valable pour le polynome $g(z)$. Or, le nombre de racines de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

est exactement égal à celui de la congruence

$$g(z) \equiv 0 \pmod{p},$$

sauf pour a_0 divisible par p. La formule (4) est donc valable pour tous les polynomes irréductibles.

Lorsque $f(x)$ est réductible, la formule (4) subsiste encore, si l'on y remplace le membre $\log x$ par $m \log x$, où m désigne le nombre de facteurs irréductibles différents contenus dans $f(x)$.

5. Soit donnée la fonction rationnelle, entière de degré n à coefficients entiers

$$(1) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

---

[1] *Voir* R. Dedekind, *Ueber den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen* (*Abh. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen*, 1878).

Désignons par P_x le plus grand facteur premier du produit

$$(2) \qquad f(1).f(2).f(3)\ldots f(x).$$

[Cette définition exige que $f(x)$ ne s'annule pour aucune valeur entière, positive de x.]

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'on a

$$(3) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x(\log x)^{\varepsilon}}{P_x} = 0, \qquad \text{où } \varepsilon < 1,$$

pour toute fonction irréductible $f(x)$ de degré > 1.

Cherchons d'abord une limite supérieure de l'exposant L de la plus haute puisance p^{L} du nombre premier p, qui divise le produit

$$(4) \qquad f(1).f(2).f(3)\ldots f(N).$$

Si p ne divise pas le discriminant D de $f(x)$, la congruence

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\bmod p^m)$$

possède exactement ν_p racines incongrues (*cf.* § 1, théorème I, et pour la définition de ν_p, § 2). L'exposant L de la plus haute puissance de p qui divise (4) ne peut donc surpasser la quantité

$$(5) \qquad \nu_p\left[E\left(\frac{N}{p}\right) + 1 + E\left(\frac{N}{p^2}\right) + 1 + \ldots + E\left(\frac{N}{p^l}\right) - 1\right],$$

où p^{l+1} est plus grand que tous les nombres $|f(1)|, |f(2)|, \ldots, |f(N)|$. [$E(x)$ désigne le plus grand nombre entier contenu dans x.]

Si p divise le discriminant D, le nombre des racines de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\bmod p^m)$$

est au plus égal à nD^2 (*cf.* § 1, théorème II). L'exposant cherché L ne peut donc être supérieur à

$$(5') \qquad nD^2\left[E\left(\frac{N}{p}\right) + 1 + E\left(\frac{N}{p^2}\right) + 1 + \ldots + E\left(\frac{N}{p^l}\right) + 1\right].$$

Nous pouvons toujours déterminer un nombre positif x_0 tel que [1]

$$|f(x)| = |a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n| < a_0(x + x_0)^n$$

---

[1] Pour simplifier, nous supposons a_0 positif.

pour toute valeur positive de x. Car nous avons, pour $x > 0$,

$$|f(x)| \leqq a_0 x^n + |a_1| x^{n-1} + \ldots + |a_k| x^{n-k} + \ldots + |a_n|$$

et

$$a_0(x + x_0)^n = a_0 x^n + a_0 \binom{n}{1} x_0 x^{n-1} + \ldots + a_0 \binom{n}{k} x_0^k x^{n-k} + \ldots + a_0 x_0^n.$$

Il suffit donc de choisir le nombre x_0 plus grand que tous les nombres

$$\left| \sqrt[k]{\frac{a_k}{a_0 \binom{n}{k}}} \right| \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Il résulte de là qu'on peut choisir l'exposant l de manière qu'on ait

$$p^l \leqq a_0 (N + x_0)^n < p^{l+1}$$

ou

$$(6) \qquad l \leqq \frac{\log a_0}{\log p} + n \frac{\log(N + x_0)}{\log p} < l + 1.$$

Comme

$$E\left(\frac{N}{p}\right) + E\left(\frac{N}{p^2}\right) + \ldots + E\left(\frac{N}{p^l}\right) \leqq N\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^l}\right) < \frac{N}{p-1},$$

nous pouvons remplacer les limites (5) et (5′) par les suivantes :

$$\nu_p \frac{N}{p-1} + \nu_p \frac{\log a_0}{\log p} + n \nu_p \frac{\log(N + x_0)}{\log p}$$

et

$$n D^2 \frac{N}{p-1} + n D^2 \frac{\log a_0}{\log p} + n^2 D^2 \frac{\log(N + x_0)}{\log p}.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\begin{aligned} &\sum_{x=1}^{x=N} \log |f(x)| \\ &\quad < \sum_{p}^{p \leqq p_N} \log p \left[\nu_p \frac{N}{p-1} + \nu_p \frac{\log a_0}{\log p} + n \nu_p \frac{\log(N + x_0)}{\log p} \right] \\ &\quad + \sum_{D \equiv 0 \pmod p} \log p \left[n D^2 \frac{N}{p-1} + n D^2 \frac{\log a_0}{\log p} + n^2 D^2 \frac{\log(N + x_0)}{\log p} \right]. \end{aligned}$$

Il est évident que l'ordre de grandeur de la dernière somme êst $O(N)$.

Nous avons, de plus,

$$\sum_{p \leq P_N} \nu_p \frac{\log p}{p-1} = \sum_{p \leq P_N} \nu_p \frac{\log p}{p} + O(1).$$

Car la série

$$\sum_{p}^{\infty} \nu_p \frac{\log p}{p(p-1)}$$

est convergente, puisque l'est la série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k(k-1)}$$

Nous arrivons donc à la relation

$$(7) \qquad \sum_{x=1}^{x=N} \log|f(x)| < \sum_{p \leq P_N} N \nu_p \frac{\log p}{p} + \sum_{p \leq P_N} \nu_p [\log a_0 + n \log(N + x_0)] + O(N).$$

Supposons qu'il existe une grandeur g telle qu'on ait pour une infinité de valeurs de N l'inégalité

$$(8) \qquad P_N \leq g N (\log N)^{\varepsilon} \qquad \text{pour } \varepsilon < 1.$$

Dans ce cas, nous aurons, d'après la formule (4), paragraphe 2 :

$$\sum_{p \leq P_N} \nu_p \frac{\log p}{p} = \log P_N + O(1) \leq \log N + \varepsilon \log \log N + O(1),$$

et, en outre, d'après la théorie de la distribution des nombres premiers,

$$\sum_{p \leq P_N} \nu_p \leq \sum_{p \leq P_N} n = O\left(\frac{P_N}{\log P_N}\right) = O[N(\log N)^{\varepsilon - 1}].$$

En introduisant ces valeurs dans (7), il vient

$$(9) \qquad \sum_{x=1}^{x=N} \log|f(x)| < N \log N + O[N(\log N)^{\varepsilon'}],$$

où $\varepsilon' < 1$.

D'autre part, nous avons

$$\sum_{x=1}^{x=N} \log|f(x)| - n\sum_{x=1}^{x=N} \log x = \sum_{x=1}^{x=N} \log|a_0 + a_1 x^{-1} + \ldots + a_n x^{-n}| = O(N).$$

La formule de Stirling,

$$\sum_{x=1}^{x=N} \log x = N\log N - N + \frac{1}{2}\log N + O(1),$$

donne, par suite,

$$\sum_{x=1}^{x=N} \log|f(x)| = nN\log N + O(N).$$

Or, cette formule est contradictoire avec l'inégalité (9), n étant > 1.

L'inégalité (8) n'a donc lieu que pour un nombre fini de valeurs de N. Par conséquent, le théorème (3) se trouve démontré pour toute fonction irréductible $f(x)$ de degré > 1. Nous le pouvons évidemment énoncer sous la forme suivante :

« Soit $f(x)$ une fonction rationnelle, entière, irréductible, de degré > 1 à coefficients entiers. Alors il y a au moins un nombre parmi les nombres

$$f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad \ldots,\quad f(x)$$

qui est divisible par un nombre premier $p > x(\log x)^{\varepsilon}$, ε étant un quantité quelconque < 1, pour tous les $x > x_0$, où le nombre x_0 dépend de ε. »

Plus généralement, nous tirons de là le résultat suivant :

Soit $f(x)$ une fonction rationnelle, entière, à coefficients entiers, possédant au moins un zéro irrationnel. Alors, il y a au moins un nombre, différent de zéro, parmi les nombres

$$f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad \ldots,\quad f(x),$$

qui est divisible par un nombre premier $p > x(\log x)^{\varepsilon}$, ε étant une quantité quelconque < 1, pour tous les $x > x_0$, où le nombre x_0 dépend de ε.

Sur les systèmes de relations singulières entre les périodes de fonctions abéliennes à trois variables;

PAR PAUL LÉVY.

INTRODUCTION.

1. *Notions générales.* — L'objet du présent travail est l'étude, dans le cas des fonctions abéliennes à trois variables, des relations singulières entre les périodes. Ces relations, déjà étudiées dans le cas de deux variables par M. G. Humbert (*Journal de Mathématiques*, 1899 et 1900), sont nécessaires et suffisantes pour que les fonctions considérées admettent des *transformations* (au sens d'Hermite) autres que celles qui existent quelles que soient les périodes. Elles sont aussi nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des fonctions *intermédiaires*, admettant les périodes considérées, autres que celles qui existent quelles que soient les périodes et qui sont réductibles aux fonctions thêta.

Dans le cas de trois variables, les relations singulières constituent un système de trois équations du second degré.

Notre point de départ est un résultat de M. Humbert, d'après lequel on peut déduire algébriquement d'un système de relations singulières un autre système de même forme, et, par des combinaisons linéaires, une simple infinité de systèmes nouveaux. Quoique équivalents au système initial, ils décèlent l'existence de transformations et de fonctions intermédiaires autres que celles qui semblaient d'abord résulter seules de ce système.

En considérant comme distincts les systèmes dérivés les uns des autres par l'opération indiquée par M. Humbert, que nous appellerons

opération $\mathfrak{J}$, un système de relations singulières dépend d'une manière linéaire et homogène de 14 paramètres, et peut être représenté par un point A de l'espace E_{13} à 13 dimensions. Les systèmes dérivés les uns des autres par l'opération $\mathfrak{J}$ et par des combinaisons linéaires sont représentés par des points d'une même droite, que nous appellerons *droite* D.

D'autre part, le système de périodes peut être représenté par un point M de l'espace E_6 à 6 dimensions. Un système de relations singulières est un système de trois relations entre les points A et M.

Le point de vue auquel nous nous placerons est le suivant. De points A, A′, A″, ... résultent, par l'opération $\mathfrak{J}$ et par des combinaisons linéaires, de nouveaux points. On arrive ainsi à définir une variété linéaire, que nous appelons *variété* L, d'où l'on ne peut pas sortir par l'opération $\mathfrak{J}$. Il arrive quelquefois que, des systèmes donnés initialement, résultent algébriquement, mais pas par l'opération $\mathfrak{J}$, des systèmes représentés par des points non situés dans cette variété L, mais dans une variété analogue plus étendue. Cette circonstance est exceptionnelle et ne se produit jamais pour les variétés L déduites d'un seul point A (qui sont des droites D); elle ne sera signalée qu'accidentellement dans le dernier Chapitre de cette étude.

Si un point M de l'espace E_6 est lié par les relations singulières aux points A, A′, A″, ..., donnés dans l'espace E_{13}, et par suite à tous ceux de la variété L déterminée par ces points, il décrit une variété, que nous appelons *variété* s correspondant à la variété L.

L'objet de ce travail est l'étude des variétés L, des variétés s et de la correspondance entre ces deux sortes de variétés.

Les relations singulières devant être à coefficients entiers pour être intéressantes au point de vue d'Hermite et de M. Humbert, cette étude peut être entreprise au point de vue algébrique et au point de vue arithmétique. Nous ne nous sommes placés qu'au premier point de vue, de sorte que cette étude peut apparaître comme devant servir d'introduction à d'autres recherches de nature arithmétique. Nous pensons toutefois qu'elle peut présenter en elle-même quelque intérêt.

2. *Résumé des principaux résultats; géométrie de l'espace* E_{13}. — Une notion fondamentale, dans l'étude de l'espace E_{13}, est celle de *point exceptionnel*. Nous appelons ainsi un point confondu avec celui

qu'on déduit de lui par l'opération $\mathfrak{J}$. (Les systèmes de relations singulières correspondant à de tels points seront dits *systèmes exceptionnels*.)

L'étude de la substitution résultant de l'opération $\mathfrak{J}$ effectuée sur les points d'une même droite D montre aisément qu'une telle droite contient trois points exceptionnels. Ce résultat a été obtenu par M. Humbert, qui a formé l'équation du troisième degré définissant ces points et qui introduit deux invariants I et J. Si $J^2 - 4I^3 = 0$, deux de ces points sont confondus, en un point *exceptionnel double*.

J'ai complété ces résultats en montrant que les points exceptionnels constituent une *variété* V à 8 dimensions. Par chaque point exceptionnel passent une quadruple infinité de droites D. La propriété d'un point exceptionnel d'être double ne dépend que de ce point, et non de la droite D considérée. Au contraire, la propriété d'être *triple* dépend de la droite D. Tout point exceptionnel double est triple pour une triple infinité de droites D.

L'étude des droites ou plans (variétés linéaires à un nombre quelconque de dimensions), situés sur la variété V, joue un grand rôle. Nous appelons ces *droites* Δ. Elles dépendent de 11 paramètres. Chaque droite Δ peut être considérée d'une manière et d'une seule comme l'intersection de deux variétés linéaires, l'une à 4 dimensions, l'autre à 2 dimensions, situées sur la variété V. On a ainsi sur cette variété deux séries distinctes de plans, dépendant respectivement de 5 et 9 paramètres, que nous appelons *plans* Π_4 et *plans* π_2. Il n'en existe pas d'autre [1].

Dans ces plans, les points exceptionnels doubles sont définis par une condition linéaire. Dans un plan Π_4, on a ainsi un *plan* Π_3 *double* (l'indice désignant toujours le nombre de dimensions); dans un plan π_2, on a *en général* une *droite* Δ *double*, et sur une droite Δ qui n'est pas double, on a un seul point exceptionnel double. Il peut arriver qu'un *plan* π_2 soit *double*, c'est-à-dire ne contienne que des points excep-

[1] Par un point A de la variété V passent une quadruple infinité de droites Δ, qui se répartissent en une simple infinité de plans Π_4, et en une triple infinité de plans π_2. Si le point A est double, une infinité simple de ces plans π_2 sont doubles; ils sont situés sur la quadrique Q associée à A (*voir* plus loin dans le texte).

tionnels doubles. Les droites d'un tel plan ne sont pas des droites Δ doubles quelconques; nous les appelons *droites Δ spéciales*. Dans un plans H_3 double, ces droites constituent un complexe linéaire. Elles jouissent d'une autre propriété caractéristique : ce sont les seules droites Δ qui puissent être considérées comme limites de droites D.

Ces droites Δ, plans π_2 ou H_4, sont évidemment des variétés L. En dehors de ces variétés dont tous les points sont exceptionnels, une variété L à n dimensions est évidemment un lieu de droites D dépendant de $n-1$ paramètres, dont les points exceptionnels décrivent trois nappes ayant des nombres de dimensions n_1, n_2, n_3 au plus égaux à $n-1$. Il peut arriver que, parmi les droites D qui décrivent la variété L, certaines se réduisent à des droites Δ spéciales qui ne soient situées sur aucune des trois nappes; on a alors une *nappe spéciale*.

On démontre aisément que $n_1+n_2+n_3=2n-2$. On a alors trois cas à distinguer suivant que la valeur maxima $n-1$ est atteinte par 0, 1 ou 2 des nombres n_1, n_2 et n_3.

Premier cas : $n_1=n_2=n-1$, $n_3=0$. — La variété L sera dite dans ce cas un *plan* $\mathfrak{P}$. C'est un lieu de droites D passant par un point exceptionnel fixe A. Le plan $\mathfrak{P}$ le plus étendu est un plan à 5 dimensions, lieu de toutes les droites D passant par A. Les deux nappes autres que celles constituées par le point A constituent une quadrique Q, à discriminant non nul, dite *quadrique* Q *associée à* A; elle contient A ou non suivant que ce point exceptionnel est double ou non. (Si ce point est double, il est alors triple pour les droites D tangentes à la quadrique; celles situées sur la quadrique, en nombre doublement infini, sont des droites Δ spéciales.) Cette quadrique contient deux séries triplement infinies de plans à 2 dimensions; les uns sont des plans π_2; les autres sont des plans H_2 situés dans des plans H_3. Sur la quadrique Q, le lieu des points exceptionnels doubles est son intersection avec le plan polaire de A.

Deuxième cas : $n_1=n_2=n_3=n-1$. — La variété L sera dite dans ce cas *variété* $\mathfrak{L}$. La variété $\mathfrak{L}$ la plus étendue est une variété $\mathfrak{L}_5$ à 5 dimensions, définie par deux plans π_2 et π'_2 *associés*, c'est-à-dire tels que toute droite joignant un point de l'un à un point de l'autre

soit une droite D; les plans π_2 s'associent tous deux à deux de cette manière. La troisième nappe de points exceptionnels est un plan Π_4, que nous appelons *plan de base* de la variété $\mathcal{L}_5$. Le lieu des points exceptionnels doubles est le plan Π_3 double dans ce plan; il contient les droites Δ doubles des plans π_2 et π'_2, qui sont conjuguées par rapport au complexe des droites Δ spéciales du plan Π_3 double.

Il peut arriver que π_2 et π'_2 soient confondus en un plan π_2 double. Un tel plan, et un plan Π_4 quelconque le coupant (en un point au moins, et par suite suivant une droite), déterminent une *variété* $\mathcal{L}_5$ *spéciale*.

Troisième cas : n_1, n_2, n_3 sont inférieurs à $n-1$. La variété L sera dite dans ce cas *variété* $\mathfrak{M}$. Les variétés de ce type peuvent être plus complexes que celles des deux premiers types. Signalons :

La variété $\mathfrak{M}_9$, à 9 dimensions, lieu des variétés $\mathcal{L}_5$ ayant même plan de base;

Le plan $\mathfrak{T}_8$, à 8 dimensions, tangent à la variété V en un point exceptionnel double A; la quadrique Q associée à A constitue une nappe de points exceptionnels dans $\mathfrak{T}_8$; les deux autres sont constituées par le cône, lieu des droites Δ passant par A;

La variété $\mathfrak{M}_{10}$, à 10 dimensions, lieu des plans $\mathfrak{T}_8$ tangents à la variété aux différents points d'un plan π_2 double;

La variété $\mathfrak{M}_6$, à 6 dimensions, intersection de deux variétés $\mathfrak{M}_9$ dont les plans de base se coupent en un point exceptionnel double B; les points exceptionnels y constituent deux plans Π_3 se coupant en B et la quadrique Q associée à B;

La variété $\mathfrak{M}_4$, à 4 dimensions, intersection de trois variétés $\mathfrak{M}_9$ dont les plans de base se coupent deux à deux en des points exceptionnels doubles B, B_1, B_2. Les nappes de points exceptionnels sont trois plans Π_2, à 2 dimensions, appartenant respectivement aux trois plans de base; il y a en outre une nappe spéciale, constituée par le plan B, B_1, B_2, qui est un plan Π_2 double.

5. *Géométrie de l'espace* E_6. — D'après les notations adoptées pour les périodes, les coordonnées d'un point de l'espace E_6 sont désignées par G, G', G'', H, H', H''. Nous appellerons *cône* $\mathfrak{C}_3$ le cône

défini paramétriquement par les équations

$$G = t^2, \qquad G' = t'^2, \qquad G'' = t''^2,$$
$$H'' = t't'', \qquad H = t''t, \qquad H' = tt'.$$

La génératrice joignant l'origine au point t, t', t'' sera dite *génératrice* (t, t', t'') *du cône* $\mathcal{C}_3$. Nous appellerons *cône* $\mathcal{C}_4$ (ou encore cylindre $\mathcal{C}_4$), de coefficients t, t', t'', le lieu décrit par le cône $\mathcal{C}_0$ dans une translation parallèle à la génératrice (t, t', t'). On peut représenter soit la génératrice (t, t', t''), soit le cône $\mathcal{C}_3$ correspondant, par le point a défini dans un plan par les coordonnées homogènes t, t', t''.

Quand le point a décrit une droite $a_1 a_2$, la génératrice (t, t', t'') décrit un *cône du second degré* $\mathcal{C}_2$ dans un *plan* P_3 à 3 dimensions. La translation de ce cône parallèlement à n'importe quelle de ses génératrices lui faisant décrire tout le plan P_3, ce plan est situé sur le cône $\mathcal{C}_4$ représenté par n'importe quel point de la droite $a_1 a_2$. Ces cônes constituent un faisceau linéaire ; leur intersection est constituée par le cône $\mathcal{C}_3$ et le plan P_3. On peut considérer que la droite $a_1 a_2$ représente soit ce faisceau linéaire, soit le plan P_3 commun aux cônes $\mathcal{C}_4$ de ce faisceau, soit le cône $\mathcal{C}_2$ intersection de ce plan et du cône $\mathcal{C}_3$.

Le lieu, soit de tous les cônes $\mathcal{C}_4$, soit de tous les plans P_3, est un *cône* $\mathcal{C}_5$ d'équation

$$\begin{vmatrix} G & H'' & H' \\ H'' & G' & H \\ H' & H & G'' \end{vmatrix} = 0.$$

Nous appellerons *plan* $\mathfrak{T}_3$ la variété linéaire à trois dimensions déterminée par trois génératrices du cône $\mathcal{C}_3$, représentées par trois points a, a', a'' non en ligne droite (s'ils étaient en ligne droite, ce serait un plan P_3). Le plan $\mathfrak{T}_3$ ne contient pas d'autre génératrice que celles introduites par sa définition. Il est donc représentable d'une manière unique par trois points a, a', a''.

Nous appellerons *plan* $\mathfrak{T}_4$ la variété linéaire à quatre dimensions déterminée par un plan P_3 et une génératrice du cône $\mathcal{C}_3$. Il ne contient pas d'autre génératrice du cône $\mathcal{C}_3$ que la génératrice isolée introduite dans sa définition et celles qui, situées dans P_3, y décrivent

un cône $\mathfrak{S}_2$. Le plan $\mathfrak{T}_4$ est représentable par un point a et une droite $a_1 a_2$.

Un plan $\mathfrak{T}_3$ est évidemment situé sur trois plans $\mathfrak{T}_4$, représentés chacun par un sommet du triangle $a a' a''$ et le côté opposé. Inversement, chaque plan $\mathfrak{T}_4$ contient une double infinité de plans $\mathfrak{T}_3$, obtenus en choisissant deux points a' et a'' sur la droite $a_1 a_2$.

Nous avons considéré dans ce qui précède des cônes ayant l'origine pour sommet, ou des plans contenant l'origine. Nous désignerons par les mêmes notations $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$, P_3, $\mathfrak{T}_4$, $\mathfrak{T}_5$ les différentes variétés déduites des précédentes par un changement d'origine.

Un système de relations singulières définit une *variété* s_4 *ou* s_3, à 4 ou 3 dimensions, suivant qu'il est exceptionnel ou non. S'il est exceptionnel double, la variété s_4 est un cône $\mathfrak{S}_4$. S'il est exceptionnel simple, la variété s_4 est un cylindre, dont la section plane est le lieu, d'une part d'une simple infinité de plans à 2 dimensions, d'autre part d'une simple infinité de droites. Le cylindre s_4 lui-même est donc le lieu d'une infinité simple de plans à 3 dimensions, qui sont des plans P_3, représentés par des droites a_1, a_2 pivotant autour d'un point fixe; la génératrice représentée par ce point est parallèle à celles du cylindre. Le cylindre s_4 peut se réduire en particulier à un plan $\mathfrak{T}_4$.

Une variété s_3, qui peut en particulier se réduire à un plan $\mathfrak{T}_3$, peut se représenter paramétriquement de manière que les trois séries de lignes coordonnées soient des droites $\mathfrak{D}$, génératrices de cônes $\mathfrak{S}_3$. Les trois séries de surfaces coordonnées sont des quadriques, dont chacune est située dans un plan P_3, et a pour cône directeur un cône $\mathfrak{S}_2$; nous appellerons une telle quadrique une *pseudosphère*. Les plans P_3 correspondant à une même série de surfaces coordonnées sont parallèles à une même droite du cône $\mathfrak{S}_3$; par une translation parallèle à cette droite, chaque pseudosphère engendre un plan P_3 et la variété s_3 engendre une variété s_4. On trouve ainsi les trois variétés s_4 contenant une variété s_3, représentant les trois systèmes exceptionnels dérivés par l'opération $\mathfrak{F}$ d'un système donné de relations singulières; chacune de ces variétés est liée à une série de génératrices rectilignes sur s_3, et la recherche analytique des génératrices passant par un point de s_3 correspond par suite à une

même équation du troisième degré, indépendante du point choisi, qui est celle indiquée au n° 2.

Il peut d'ailleurs arriver qu'une variété s_3 contienne d'autres génératrices que celles que nous venons de considérer; elles ne sont pas parallèles aux génératrices du cône $\mathfrak{C}_3$. Il peut arriver aussi que les trois systèmes de génératrices parallèles à celles du cône $\mathfrak{C}_3$ se réduisent à deux distincts, ou même un seul, et ne puissent pas être prises comme lignes coordonnées. Ainsi, un plan $\mathfrak{C}_3$ peut se réduire à un plan tangent au cône $\mathfrak{C}_3$; les trois points a, a', a'' qui le représentent sont alors confondus.

Une variété s est évidemment une intersection de variétés s_3 ou s_4. Indiquons la correspondance des principaux types de variétés s avec les types de variétés L définis dans l'espace E_{13}.

Un plan P_3 est situé sur une quadruple infinité de variétés s_4, dont une triple infinité de cônes $\mathfrak{C}_4$. C'est la variété s correspondant à un plan Π_4.

Un cône $\mathfrak{C}_3$ est commun à une double infinité de cônes $\mathfrak{C}_4$ ayant même sommet; c'est la variété s correspondant à un plan Π_2 double. Chaque cône $\mathfrak{C}_4$ a d'ailleurs une infinité de sommets, et contient une infinité de cônes $\mathfrak{C}_3$, ce qui correspond au fait qu'un point exceptionnel double est sur une infinité de plans Π_2 doubles.

Une droite Δ spéciale est l'intersection d'un plan Π_1 et d'un plan Π_2 double. La variété s correspondante comprend le cône $\mathfrak{C}_3$ et le plan P_3 correspondant à ces plans Π_2 et Π_4. Ce cône $\mathfrak{C}_3$ et ce plan P_3 ont pour intersection un cône $\mathfrak{C}_2$, qui est la variété s correspondant à la variété $\mathfrak{L}_5$ spéciale déterminée par le plan π_2 double et le plan Π_4.

A une variété $\mathfrak{L}_5$ non spéciale correspond une pseudosphère, dont le plan P_3 correspond au plan de base de la variété $\mathfrak{L}_5$.

A un *pseudocercle*, intersection de deux pseudosphères d'un même plan P_3, et par suite de toutes celles d'un faisceau linéaire, correspond une variété $\mathfrak{R}_6$, lieu d'une série simplement infinie de variétés $\mathfrak{L}_5$ ayant même plan de base. Si le pseudocercle se réduit à deux droites concourantes (nécessairement génératrices d'un même cône $\mathfrak{C}_3$), les deux nappes de points exceptionnels dans $\mathfrak{R}_6$ autres que ceux du plan de base, qui sont de toute façon des variétés à

trois dimensions, sont algébriquement distinctes, et ont en commun le plan H_2 double qui correspond au cône $\mathfrak{S}_3$.

L'ensemble de trois génératrices du cône $\mathfrak{S}_3$ correspond à la variété $\mathfrak{M}_{11}$, intersection des trois variétés $\mathfrak{M}_9$, aux plans de base desquelles correspondent les plans P_3 définis par ces génératrices assemblées deux à deux.

Au plan $\mathfrak{T}_8$, tangent à la variété V en un point exceptionnel double B, correspond la droite ω, ligne des points coniques du cône $\mathfrak{S}$, correspondant à B.

A la variété $\mathfrak{M}_{10}$, lieu des plans $\mathfrak{T}_8$ tangents à V aux points d'un plan π_2 double, correspond un point, sommet du cône $\mathfrak{S}_3$ correspondant au point π_2 double.

Si le point exceptionnel double B décrit un plan H_2 double, la droite ω, ligne des points coniques du cône $\mathfrak{S}$, correspondant, décrit un plan P_3 en restant parallèle au cône $\mathfrak{S}_2$ de ce plan. La correspondance entre B et cette droite ω est une transformation de Lie.

4. *Transformation d'Hermite.* — La transformation d'Hermite, qu'on peut envisager soit comme une transformation ponctuelle dans l'espace E_6, soit comme une transformation ponctuelle dans l'espace E_{13}, est utile à considérer dans la géométrie de ces espaces.

Dans l'espace E_{13}, la transformation d'Hermite est une transformation homographique, qui conserve la variété V, et transforme les variétés L des différents types en variétés analogues; elle transforme aussi les complexes de droites spéciales en complexes analogues.

Dans l'espace E_6, c'est une transformation ponctuelle, transforme une droite ω, parallèle à une génératrice du cône $\mathfrak{T}_3$ en une droite analogue, une pseudosphère en une pseudosphère et, d'une manière générale, une variété s en une variété analogue. Elle comprend comme cas particulier la translation et aussi une transformation permettant de transformer les variétés s_3 passant par l'origine en variétés s_3 linéaires, c'est-à-dire en plans $\mathfrak{T}_3$. Par ces transformations, une variété s_3 peut toujours être transformée en un plan $\mathfrak{T}_3$ passant par l'origine. Cette réduction permet d'obtenir aisément les propriétés des génératrices des variétés s_3.

On remarque l'analogie entre le passage d'un espace à l'autre, et la transformation de Lie, qui transforme une transformation homogra-

phique conservant un complexe linéaire en une transformation ponctuelle conservant les angles (transformant une droite isotrope en une droite isotrope). D'après le résultat final du n° **3**, il y a plus qu'une simple analogie.

5. Le Chapitre I du présent travail a pour objet la formation des systèmes de relations singulières.

Dans le Chapitre II, nous étudions l'opération $\mathfrak{J}$ de M. Humbert, et introduisons la notion de système exceptionnel. Dans le Chapitre III, nous étudions la géométrie de l'espace E_{13}; dans le Chapitre IV, la géométrie de l'espace E_6 et la correspondance entre les deux espaces.

J'indique maintenant quels sont les principaux résultats dus à M. Humbert : ce sont la formation des systèmes de relations singulières, l'opération $\mathfrak{J}$, la détermination des systèmes exceptionnels dérivés d'un système donné, la formation des invariants I et J et leur invariance par une transformation d'Hermite d'ordre 1 ; l'existence sur les variétés s_3 de trois séries de génératrices rectilignes, dépendant de la même équation du troisième degré que les trois systèmes exceptionnels dérivés du système étudié ; le groupement de ces génératrices en variétés à deux dimensions qui sont de deux manières le lieu d'une série simplement infinie de génératrices.

Même dans l'exposé de ces résultats, il m'est arrivé de m'écarter de la marche suivie par M. Humbert. Pour la formation des relations singulières, l'introduction de notations symétriques m'a permis de simplifier l'écriture des principales formules. Pour le reste, les changements ont été plus importants, notamment en ce qui concerne les propriétés des variétés s_3, que j'ai liées à celles des autres types de variétés s.

Je veux, en terminant cette Introduction, adresser mes remercîments à M. Humbert qui, ayant obtenu les résultats que je viens de rappeler, ayant fait notamment la découverte si féconde de l'opération $\mathfrak{J}$, a bien voulu me confier ses calculs et m'a encouragé à poursuivre l'étude de cette question [1].

Je rappelle que les principaux résultats des Chapitres I et II ont été

[1] Ces lignes ont été écrites avant la mort de M. Humbert, enlevé à la Science et à l'affection des siens, alors que l'on pouvait espérer encore la continuation

énoncés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 8 juin 1914 par M. Humbert et moi. J'avais commis quelques erreurs en rédigeant le n° 3 de cette Note. La géométrie de l'espace E_{13}, comme cela résulte du résumé qui précède, est plus compleve que ne l'indique le passage en question.

Les principaux résultats du Chapitre III ont été exposés le 28 avril 1920 à la Société mathématique de France. Ceux du Chapitre IV sont inédits.

CHAPITRE I.

FORMATION DES SYSTÈMES DE RELATIONS SINGULIÈRES.

1. *Notations.* — Soit un *premier système* de fonctions abéliennes à trois variables U, V, W, admettant comme *périodes normales*

$$\begin{array}{lllllll} U: & 1, & 0, & 0, & G, & H', & H; \\ V: & 0, & 1, & 0, & H', & G', & H; \\ W: & 0, & 0, & 1, & H', & H, & G'. \end{array}$$

Nous désignerons aussi ces périodes par

$$\begin{array}{llll} P_1, & P_2, & \ldots, & P_6, \\ P'_1, & P'_2, & \ldots, & P'_6, \\ P''_1, & P''_2, & \ldots, & P''_6. \end{array}$$

et représenterons symboliquement par (Ω_i) le système de périodes simultanées P_i, P'_i, P''_i. Un système quelconque de périodes pourra être représenté par

$$(\Omega) = N_1(\Omega_1) + N_2(\Omega_2) + \ldots + N_6(\Omega_6), \tag{1}$$

les N_i étant des entiers positifs, nuls, ou négatifs.

Nous poserons $U = U_1 + iU_2$, et emploierons des notations analogues pour désigner les parties réelles et imaginaires de V, W, G,

de ses beaux travaux. Il m'avait manifesté notamment l'intention d'étudier le point de vue arithmétique, que j'ai laissé de côté au cours de ce travail (*voir* dernier alinéa du n° 1).

G', G'', H, H', H''. Si, dans l'expression (1), on donne aux X_i des valeurs *réelles quelconques*, on trouve, au lieu d'un système de périodes $(\mathfrak{P})$, un système de valeurs complexes des variables

$$(2)\quad \begin{cases} U = U_1 + iU_2 = X_1P_1 + \ldots + X_6P_6 = X_1 + X_4G' + X_5H'' + X_6H', \\ V = V_1 + iV_2 = X_1P'_1 + \ldots + X_6P'_6 = X_2 + X_4H'' + X_5G'' + X_6H, \\ W = W_1 + iW_2 = X_1P''_1 + \ldots + X_6P''_6 = X_3 + X_4H' + X_5H + X_6G''. \end{cases}$$

Ces valeurs sont d'ailleurs quelconques, puisqu'on sait qu'il n'existe entre les six systèmes de périodes aucune relation linéaire et homogène à coefficients réels. U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2 sont donc six fonctions linéaires indépendantes des X_i. Leur déterminant fonctionnel, qui se réduit à

$$\frac{\partial(U_2, V_2, W_2)}{\partial(X_4, X_5, X_6)} = \begin{vmatrix} G_2 & H''_2 & H'_2 \\ H''_2 & G'_2 & H_2 \\ H'_2 & H_2 & G''_2 \end{vmatrix},$$

n'est donc pas nul. On a ainsi une représentation des trois valeurs complexes U, V, W dans l'espace réel à six dimensions E_6 par le point de coordonnées $X_1, X_2, \ldots, X_6$. L'ensemble des points représentant des systèmes *équivalents* de valeurs de U, V, W [c'est-à-dire ne différant que par les trois composantes d'une période $(\mathfrak{P})$] constitue un réseau cubique : nous dirons que ces points sont *équivalents*.

Considérons un *deuxième système* de fonctions abéliennes à trois variables u, v, w. Nous désignerons par (ϖ_i) le système de périodes q_i, q'_i, q''_i, et désignerons pour le reste, par des petites lettres, les quantités analogues à celles qui, à propos du premier système, ont été désignées par les majuscules correspondantes.

2. *Le problème de la transformation.* — Le problème de la transformation, au sens d'Hermite, est le suivant :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse établir entre les deux groupes de variables des relations de la forme

$$(3)\quad \begin{cases} U = lu + mv + nw, \\ V = l'u + m'v + n'w, \\ W = l''u + m''v + n''w, \end{cases}$$

et telles que les fonctions abéliennes du premier système s'expriment rationnellement en fonction de celles du second.

Nous dirons que la transformation (3) fait passer des variables U, V, W aux variables u, v, w; ou du premier système de périodes au second.

5. *Mise en équation du problème.* — Pour que les conditions du problème posé soient vérifiées, il faut et il suffit que, toutes les fois que u, v, w augmentent respectivement des trois composantes d'une période (ϖ), U, V, W augmentent des trois composantes d'une période (Ω). A chaque période (ϖ_i) correspond ainsi une période

$$(4)\qquad a_{i,1}(\Omega_1) + a_{i,2}(\Omega_2) + \ldots + a_{i,6}(\Omega_6),$$

les $a_{i,j}$ étant des entiers. A la période

$$(\varpi) = x_1(\varpi_1) + x_2(\varpi_2) + \ldots + x_6(\varpi_6)$$

correspond alors la période

$$(\Omega) = X_1(\Omega_1) + X_2(\Omega_2) + \ldots + X_6(\Omega_6),$$

les X_j étant donnés par la formule

$$(5)\qquad X_j = a_{1,j}x_1 + a_{2,j}x_2 + \ldots + a_{6,j}x_6 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Pour avoir les relations entre les coefficients $a_{i,j}$ et les périodes, égalons les composantes de la période (4) aux valeurs fournies par les formules (3). Il vient ainsi, en remplaçant les P, P', P'' par leurs valeurs,

$$(6)\qquad \begin{cases} l q_i + m q_i + n q_i'' = a_{i,1} + a_{i,4} G + a_{i,5} H + a_{i,6} H', \\ l' q_i + m' q_i + n' q_i = a_{i,2} + a_{i,4} H' + a_{i,5} G + a_{i,6} H, \\ l'' q_i + m'' q_i + n'' q_i' = a_{i,3} + a_{i,4} H + a_{i,5} H' + a_{i,6} G'. \end{cases}$$

Désignons les seconds membres par b_i, b_i', b_i''. Pour $i = 1, 2, 3$, il vient

$$\begin{array}{lll} l = b_1, & m = b_2, & n = b_3, \\ l' = b_1', & m' = b_2', & n' = b_3', \\ l'' = b_1'', & m'' = b_2'', & n'' = b_3''. \end{array}$$

Les formules (6), pour $i = 4, 5, 6$, deviennent alors

$$(7)\qquad \begin{cases} b_i = b_1 q_i + b_2 q'_i + b_3 q''_i, \\ b'_i = b'_1 q_i + b'_2 q'_i + b'_3 q''_i, \\ b''_i = a''_1 q_i + b''_2 q''_i + b''_3 q''_i, \end{cases}$$

soit neuf relations entre les coefficients $a_{i,j}$ et les périodes des deux systèmes.

4. *La transformation adjointe.* — En développant le système précédent, on vérifie aisément qu'on ne le change pas en effectuant simultanément les opérations suivantes :

1° Sur les périodes : permuter les deux systèmes de périodes ;

2° Sur les coefficients : remplacer chaque coefficient d'indices i, j par celui d'indice $j \pm 3$, $i \pm 3$ (le signe $\pm$ ne peut donner lieu à aucune incertitude puisque les indices varient de 1 à 6) et changer en outre de signe les coefficients ayant un indice égal à 1, 2 ou 3 et l'autre à 4, 5, 6.

Si l'on range les coefficients en un tableau carré, divisé en quatre carrés de neuf éléments, l'opération indiquée revient à ceci : remplacer chaque carré partiel par son symétrique par rapport au centre du tableau ; remplacer ensuite chaque élément par son symétrique par rapport à la diagonale principale ; changer le signe des éléments des carrés partiels traversés par la seconde diagonale.

Si une transformation de coefficients $a_{i,j}$ fait passer du premier système de périodes au second, il lui correspond, par l'opération précédente, une transformation faisant passer du second système de périodes au premier. Ces deux transformations sont dites *adjointes* l'une de l'autre.

Entre les neuf équations (7) nous pouvons éliminer les périodes d'un même système. On obtient ainsi deux nouveaux systèmes de trois équations qui se déduisent l'un de l'autre en permutant les deux systèmes de périodes, en changeant leurs signes, et en remplaçant chaque coefficient par le coefficient correspondant de la transformation adjointe. Il suffit de former l'un d'eux ; nous allons par exemple éliminer les périodes du deuxième système.

3. *Élimination des périodes du deuxième système.* — Pour $i = 4$, les équations (7) donnent

$$\begin{aligned} b_4 &= b_1 g + b_2 h'' = b_4 h'; \\ b'_4 &= b_1 g + b'_2 h'' + b'_4 h', \\ b''_4 &= b_1 g + b_2 h'' + b_4 h. \end{aligned}$$

L'élimination de g donne les équations

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} (b', b'')_{1,4} &= (b, b'')_{1,2} h' - (b, b')_{1,4} h, \\ (b'', b)_{1,4} &= (b'', b)_{1,2} h'' + (b', b)_{1,4} h, \\ (b, b')_{1,4} &= (b, b')_{1,2} h'' + (b, b)_{1,4} h, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} (b, b'')_{i,j} &= b_i b_j - b'_i b_j, \\ (b'', b)_{i,j} &= b_i b_j - b_i b_j, \\ (b, b')_{i,j} &= b_i b_j - b'_i b_j. \end{aligned}$$

De même, en faisant $i = 5$ et $i = 6$ dans les équations (7), on trouve

$$(8')\quad \left\{ \begin{aligned} (b', b'')_{2,5} &= (b, b'')_{2,3} h + (b, b'')_{2,1} h', \\ (b'', b)_{2,5} &= (b, b)_{2,3} h + (b'', b)_{2,1} h'', \\ (b, b')_{2,5} &= (b, b')_{2,3} h - (b, b')_{2,1} h'. \end{aligned} \right.$$

$$(8'')\quad \left\{ \begin{aligned} (b', b'')_{3,6} &= (b', b'')_{3,1} h - (b, b)_{3,2} h, \\ (b'', b)_{3,6} &= (b'', b)_{3,1} h' - (b'', b)_{3,2} h, \\ (b, b')_{3,6} &= (b, b')_{3,1} h' - (b, b)_{3,2} h. \end{aligned} \right.$$

En ajoutant les équations de même rang des systèmes (8), (8') et (8''), les périodes du deuxième système disparaissent; il vient

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} (b', b'')_{1,4} + (b, b')_{2,5} + (b', b'')_{3,6} &= 0, \\ (b'', b)_{1,4} + (b'', b)_{2,5} + (b'', b)_{3,6} &= 0, \\ (b, b')_{1,4} + (b, b')_{2,5} + (b, b')_{3,6} &= 0, \end{aligned} \right.$$

équations qui ne contiennent plus que les coefficients a_{ij} et les périodes du premier système. Ce sont donc les relations cherchées.

Pour les développer, introduisons les notations suivantes :

$$(10)\quad \begin{aligned} (a)_{i,j}^{h,k} &= a_{h,i} a_{k,j} - a_{h,j} a_{k,i}, \\ A_{i,j} &= (a)_{i,j}^{1,4} + (a)_{i,j}^{2,5} + (a)_{i,j}^{3,6} \end{aligned}$$

(les $A_{i,j}$ formant un tableau symétrique gauche), et appelons $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$,

$\mathcal{G}''$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ les mineurs correspondant respectivement à G, G′, G″, H, H′, H″ dans le déterminant

$$(11)\qquad D = \begin{vmatrix} G, & H', & H' \\ H'', & G', & H \\ H', & H, & G'' \end{vmatrix}.$$

En développant $(b', b'')_{1,3}$ on trouve

$$(a)^{1,3}_{2,3} + (a)^{1,3}_{2,6}G'' - (a)^{1,3}_{3,5}G' + [(a)^{1,3}_{2,5} - (a)^{1,3}_{3,6}]H + (a)^{1,3}_{2,4}H - (a)^{1,3}_{3,4}H'' + (a)^{1,3}_{5,6}\mathcal{G} + (a)^{1,3}_{6,4}\mathcal{H}'' - (a)^{1,3}_{4,5}\mathcal{H}'.$$

On en déduit aisément l'expression développée de la première équation (9). Calculant de même celle des deux autres équations, il vient :

$$(12)\qquad \begin{cases} A_{5,6}\mathcal{G} + A_{6,4}\mathcal{H}'' + A_{4,5}\mathcal{H}' + A_{2,6}G'' - A_{3,5}G' + (A_{2,5} - A_{3,6})H + A_{2,4}H' - A_{3,4}H'' + A_{2,3} = 0, \\ A_{5,6}\mathcal{H}'' + A_{6,4}\mathcal{G}'' + A_{4,5}\mathcal{H} + A_{3,4}G - A_{1,5}G'' + (A_{3,6} - A_{1,4})H + A_{3,5}H'' - A_{1,5}H + A_{3,1} = 0, \\ A_{5,6}\mathcal{H}' - A_{6,4}\mathcal{H} + A_{4,5}\mathcal{G}'' + A_{1,5}G' - A_{2,5}G + (A_{1,4} - A_{2,5})H'' + A_{1,6}H - A_{2,6}H' + A_{1,2} = 0, \end{cases}$$

ces trois équations se déduisant de la première par permutations circulaires des indices ou quantités

$$(1, 2, 3);\quad (4, 5, 6);\quad (G, G', G'');\quad (H, H', H').$$

Appelons *système de relations singulières entre les périodes* un système de la forme

$$(13)\qquad \begin{cases} E = \lambda\mathcal{G} + \lambda'\mathcal{H}'' + \lambda''\mathcal{H}' + \gamma' G'' - \beta' G' + (\beta' - \gamma'')H + \alpha' H' - \alpha'' H'' + \mu' = 0, \\ E' = \lambda\mathcal{H}'' + \lambda'\mathcal{G}'' + \lambda''\mathcal{H} + \alpha'' G - \gamma' G'' + (\gamma'' - \alpha')H' + \beta'' H'' - \beta' H + \mu' = 0, \\ E'' = \lambda\mathcal{H}' + \lambda'\mathcal{H} + \lambda''\mathcal{G}'' + \beta' G' - \alpha' G + (\alpha' - \beta'')H'' + \gamma' H - \gamma'' H' + \mu'' = 0, \end{cases}$$

On voit que, pour que la transformation de coefficients $a_{i,j}$ puisse faire passer du premier système de périodes au second, il faut que les périodes du premier système vérifient un système de relations singulières de coefficients

$$(14)\qquad \begin{cases} \alpha = A_{1,3}, & \beta = A_{1,2}, & \gamma = A_{1,6}, & \lambda = A_{2,6}, & \mu = A_{2,3}, \\ \alpha' = A_{2,3}, & \beta' = A_{2,4}, & \gamma' = A_{2,5}, & \lambda' = A_{3,5}, & \mu' = A_{3,1}, \\ \alpha'' = A_{3,1}, & \beta'' = A_{3,6}, & \gamma'' = A_{3,4}, & \lambda'' = A_{1,4}, & \mu'' = A_{1,2}, \end{cases}$$

les $A_{i,j}$ étant définis par la formule (10). De même, en utilisant la notation de transformation adjointe, on voit que les périodes du

second système vérifient un système de relations singulières de coefficients

$$(14') \quad \begin{cases} \alpha = B_{1,4}, & \beta = B_{2,4}, & \gamma = B_{3,4}, & \lambda = B_{2,3}, & \mu = B_{3,1}, \\ \alpha' = B_{1,5}, & \beta' = B_{2,5}, & \gamma' = B_{3,5}, & \lambda' = B_{3,1}, & \mu' = B_{1,2}, \\ \alpha'' = B_{1,6}, & \beta'' = B_{2,6}, & \gamma'' = B_{3,6}, & \lambda'' = B_{1,2}, & \mu'' = B_{2,3}, \end{cases}$$

avec

$$B_{i,j} = (a)_{1,i}^{i,j} + (a)_{2,i}^{i,j} + (a)_{3,i}^{i,j}.$$

6. *Transformations ordinaires et singulières.* — Les $a_{i,j}$ étant des entiers, il en est de même des $A_{i,j}$. On voit alors qu'il y a deux cas à distinguer :

Premier cas. — Les coefficients du système (12) sont tous nuls, c'est-à-dire que

$$(15) \qquad \alpha = \beta' = \gamma'',$$

tous les autres coefficients du tableau (14) étant nuls.

Dans ce cas, la transformation (5) aussi bien que la transformation inverse s'applique à tout système de périodes. Le système de relations singulières déduit du tableau (14) est donc identiquement vérifié en même temps que celui déduit du tableau (14'). Une telle transformation est dite *transformation ordinaire* ou *transformation d'Hermite*.

Deuxième cas. — Les coefficients du tableau (14) ne sont pas tous nuls. La transformation définie par les coefficients $a_{i,j}$ est alors dite *transformation singulière*. Elle ne s'applique qu'aux systèmes de périodes vérifiant les relations singulières.

On remarquera que, si les périodes sont quelconques, non seulement elles ne vérifient pas le système formé avec les coefficients considérés, mais elles ne vérifient aucun système analogue à coefficients entiers. Il n'existe alors aucune transformation singulière s'appliquant à ces fonctions.

7. A partir du Chapitre II, nous nous attacherons principalement à l'étude des relations singulières au point de vue algébrique, considérant des systèmes de relations à coefficients quelconques. A chacun

de ces systèmes correspondent, par les formules (10), des systèmes de coefficients $a_{i,j}$ (dépendant de 21 paramètres), à chacun desquels correspond une transformation homographique (5); mais une telle transformation, n'étant pas à coefficients entiers, ne correspond pas à une solution du problème de la transformation des fonctions abéliennes.

Remarquons que, même au point de vue algébrique auquel nous nous plaçons, il ne faut considérer que les systèmes de coefficients $a_{i,j}$ dont le déterminant ne soit pas nul. Or ce déterminant, que nous désignerons par Δ, s'exprime en fonction des coefficients $a_{i,j}$. On a, en effet,

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{6,1} & a_{6,2} & \dots & a_{6,6} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} & -a_{6,1} & -a_{6,2} & -a_{6,6} \end{vmatrix},$$

ou, en faisant le produit par lignes,

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,6} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{6,1} & \dots & A_{6,6} \end{vmatrix}.$$

Il n'y a donc à considérer que les tableaux de coefficients $A_{i,j}$ dont le déterminant ne soit pas nul. Or les coefficients

$$\alpha = A_{1,4} = -A_{4,1}, \qquad \beta = A_{2,5} = -A_{5,2} \qquad \text{et} \qquad \gamma = A_{3,6} = -A_{6,3}$$

n'interviennent dans les relations singulières que par leurs différences; on peut leur ajouter une même constante σ sans changer le système (13).

Le déterminant Δ^2 est de degré 6 en σ, le terme de plus haut degré étant σ^6. Parmi les tableaux de coefficients $A_{i,j}$ correspondant à un même système de relations singulières, il y en a donc six au plus ne convenant pas, même au point de vue algébrique auquel nous nous plaçons.

Dans le cas des transformations d'Hermite, l'expression de Δ^2 se simplifie. Appelons k la valeur commune des coefficients (15). On a

$$A_{1,4} = A_{2,5} = A_{3,6} = -A_{4,1} = -A_{5,2} = -A_{6,3} = k,$$

les autres coefficients A_{ij} étant nuls, et, par suite,

$$\Delta^2 = k^6, \qquad \Delta = \pm k^3.$$

Comme il s'agit d'une identité entre deux fonctions algébriques entières des coefficients a_{ij}, le signe qui convient ne peut changer, et il suffit d'une vérification sur un exemple numérique pour s'assurer que c'est le signe $+$. On a donc

$$\Delta = k^3.$$

De l'expression de Δ^2 résulte évidemment que les six tableaux de coefficients A_{ij} que nous avons considérés comme ne convenant pas, sont ici confondus; cela ne peut évidemment pas se produire pour une transformation singulière.

Qu'il s'agisse de transformations ordinaires ou singulières, on peut remarquer que le déterminant Δ ne change pas si l'on remplace une transformation par son adjointe (il en est, par suite, de même de k pour une transformation ordinaire), et qu'on peut toujours le supposer positif en changeant au besoin le signe des périodes G, G′, G″, H, H′, H″; c'est ce que nous ferons.

Dans le cas où les coefficients a_{ij} sont entiers, ce déterminant a alors une signification simple. Par les formules (5), à un cube de côté 1 dans l'espace e_6 correspond dans l'espace E_6 un volume égal à Δ, contenant exactement Δ points équivalents à tout point donné. Il leur correspond alors inversement Δ points de l'espace e_6, situés dans un même cube de côté 1 et en général distincts, par suite non équivalents. En raison de la relation entre les espaces E_6 et e_6 et les systèmes de variables U, V, W et u, v, w, on voit que Δ indique le nombre de systèmes de valeurs de u, v, w non équivalents, correspondant à un même système de valeurs de U, V, W. C'est ce qu'on appelle l'*ordre* de la transformation considérée.

8. *Représentation géométrique dans l'espace* E_5 [1]. — Consi-

[1] L'intérêt de cette représentation, ou de la représentation analogue dans le cas des fonctions abéliennes de deux variables, a déjà été signalé par M. G. Humbert (Cours de 1908-1909 au Collège de France; *voir* sur ce sujet la Thèse de G. Cotty).

dérons maintenant les X_i comme des coordonnées homogènes dans l'espace E_5 à cinq dimensions. Les expressions (1), égalées à 0, représentent trois plans, dont l'intersection est ce que nous appellerons une *droite*. (Dans la géométrie des espaces à $2n+1$ dimensions, il est souvent commode d'appeler *droite* une variété linéaire à n dimensions.)

Mais ce n'est pas une droite quelconque, puisqu'il existe trois relations entre les périodes Q_i, Q'_i, Q''_i. Les équations d'une droite pouvant être résolues en général par rapport aux coordonnées X_1, X_2, X_3, et écrites sous la forme

$$(16)\qquad \begin{cases} X_1 + X_4 G + X_5 H'' + X_6 H'_1 = 0, \\ X_2 + X_4 H_1 + X_5 G' + X_6 H = 0, \\ X_3 + X_4 H' + X_5 H_1 + X_6 G'' = 0, \end{cases}$$

les conditions pour que les premiers membres puissent être identifiés aux expressions (1) sont évidemment

$$(17)\qquad H = H_1, \qquad H' = H'_1, \qquad H'' = H''_1.$$

Nous appellerons *complexe* l'ensemble des droites dont les coefficients vérifient *trois* relations linéaires. Les conditions considérées peuvent s'exprimer en disant que les droites appartiennent au complexe C défini par les relations (17).

Considérons maintenant les formules (5), qui définissent les relations entre les X et les x; elles représentent une transformation homographique dans l'espace E_5. Par les formules (3) équivalentes aux formules (5), on voit que la droite D

$$U = V = W = 0,$$

qui définit le premier système de périodes et appartient au complexe C, a pour transformée la droite d

$$u = v = w = 0.$$

Pour que cette droite corresponde à un système de périodes, il faut qu'elle appartienne au complexe C, c'est-à-dire que les expressions

$$\begin{aligned} u &= x_1 + x_4 g + x_5 h'' + x_6 h'_1, \\ v &= x_2 + x_4 h''_1 + x_5 g' + x_6 h, \\ w &= x_3 + x_4 h' + x_5 h_1 + x_6 g'' \end{aligned}$$

obtenues en transformant les équations de la droite D par la transformation homographique (5), soient telles que

$$h = h_1, \qquad h = h_1, \qquad h = h_1.$$

C'est précisément en écrivant qu'il en est ainsi que nous avons obtenu le système (12). Dans notre interprétation géométrique, *les relations singulières déduites du tableau* (14) *sont donc celles qui expriment que la transformée de la droite* D *par la transformation* (5) *appartient au complexe* C.

De même les relations singulières déduites du tableau (14') *expriment que la droite* D *est la transformée d'une droite de* C.

9. La différence entre les transformations ordinaires et les transformations singulières a alors une signification évidente :

Le complexe C peut se correspondre à lui-même par la transformation homographique considérée. Toute droite de C a alors pour transformée une droite de C, correspondant à un système de périodes. On est (du moins si les coefficients sont entiers) dans le cas des transformations d'Hermite.

Dans le cas contraire, le complexe C se transforme par la transformation (5) en un autre complexe C_1, et par la transformation inverse en un complexe C_{-1}. Les seules droites correspondant à un système de périodes dont les transformées correspondent aussi à un système de périodes sont les droites appartenant à la fois à C et à C_{-1}; leurs transformées appartiennent à la fois a C et à C_1. On est dans le cas des transformations singulières.

Les relations singulières déduites du tableau (14) sont alors celles qui expriment qu'une droite de C appartient à C_{-1}. Celles déduites du Tableau (14') expriment qu'elle appartient à C_1.

On échange évidemment les rôles de C_1 et C_{-1} en remplaçant la transformation (5) par son adjointe.

10. *Transformation des coefficients* B_{ij}. — Il peut être utile de savoir ce que devient le tableau des coefficients (14) lorsqu'on transforme les périodes par une transformation de la forme (5) autre que celle à laquelle il est lié par les formules du n° 5, en particulier lorsque

cette transformation est une transformation d'Hermite. Géométriquement cela revient à transformer le complexe C par une transformation homographique

$$(18)\qquad X_j = \alpha_{1,j}x_1 + \alpha_{2,j}x_2 + \ldots + \alpha_{6,j}x_6 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6),$$

analogue à la transformation (5).

Traitons ce problème en définissant d'abord le complexe C par la transformation corrélative qui lui est liée; elle est de la forme

$$(19)\qquad U_i = \mathfrak{B}_{i,1}X_1 + \mathfrak{B}_{i,2}X_2 + \ldots + \mathfrak{B}_{i,6}X_6 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

les U_i étant des coordonnées tangentielles et les $\mathfrak{B}_{i,j}$ constituant un tableau symétrique gauche. D'autre part, la transformation (18) s'écrit, en coordonnées tangentielles,

$$(18')\qquad u_i = \alpha_{i,1}U_1 + \alpha_{i,2}U_2 + \ldots + \alpha_{i,6}U_6 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Des formules (18), (18') et (19), on déduit

$$u_i = \sum_h \sum_k \sum_j \alpha_{i,h}\mathfrak{B}_{h,k}\alpha_{j,k}x_j = \sum_j \mathfrak{B}'_{i,j}x_j,$$

en posant

$$(20)\qquad \mathfrak{B}'_{i,j} = \sum_h \sum_k \alpha_{i,h}\alpha_{j,k}\mathfrak{B}_{h,k}.$$

Dans ces formules, tous les indices varient de 1 à 6.

Cette formule résout le problème de la transformation des coefficients $\mathfrak{B}_{i,j}$. Il reste à établir les relations entre les coefficients $\mathfrak{B}_{i,j}$ et $B_{i,j}$ relatifs à un même complexe.

Je dis d'abord que les coefficients $\mathfrak{B}_{i,j}$ relatifs au complexe C sont

$$\mathfrak{B}_{1,4} = \mathfrak{B}_{2,5} = \mathfrak{B}_{3,6} = 1, \qquad \mathfrak{B}_{4,1} = \mathfrak{B}_{5,2} = \mathfrak{B}_{3,6} = -1,$$

tous les autres étant nuls. Cela revient à dire que toute droite de C, c'est-à-dire toute droite de la forme

$$(17)\qquad \begin{cases} X_1 + X_4G - X_5H' + X_6H'' = 0, \\ X_2 - X_4H'' - X_5G' + X_6H = 0, \\ X_3 + X_4H' + X_5H'' + X_6G'' = 0. \end{cases}$$

est transformée en elle-même par la transformation

$$(21)\quad \begin{cases} U_1 = X_4, & U_2 = X_5, & U_3 = X_6, \\ U_4 = -X_1, & U_5 = -X_2, & U_6 = -X_3 \end{cases}$$

En effet, les trois plans (17) ont pour transformés, par cette transformation, les points de coordonnées

$$\begin{array}{cccccc} G, & H'', & H', & 1, & 0, & 0, \\ H'', & G', & H, & 0, & 1, & 0, \\ H', & H, & G'', & 0, & 0, & 1. \end{array}$$

qui sont situés sur ces plans.

Les coefficients $\mathfrak{B}_{i,j}$ relatifs au complexe C_1, transformé de C par les formules (5), se déduisent des précédents par la formule (20). Il vient ainsi pour ces coefficients

$$\mathfrak{B}_{i,j} = (a)^{i,j}_{1,4} + (a)^{i,j}_{2,5} + (a)^{i,j}_{3,6} = B_{i,j}.$$

Les deux systèmes de coefficients $B_{i,j}$ et $\mathfrak{B}_{i,j}$ relatifs à un même complexe sont donc identiques, et la formule (20) donne

$$(22)\qquad B_{i,j} = \sum_h \sum_k \alpha_{i,h}\alpha_{j,k} B_{h,k}.$$

Il suffit d'utiliser la notion de transformation adjointe pour avoir la formule analogue relative aux $A_{i,j}$.

De la formule (22) résulte sans difficulté que, si la transformation (18) est une transformation d'Hermite d'ordre 1 :

1° Le déterminant des coefficients $B_{i,j}$ est un invariant;

2° La somme $\alpha + \beta' + \gamma'' = B_{1,4} + B_{2,5} + B_{3,6}$ est un invariant.

Un calcul un peu plus long, mais sans difficulté, montre que l'expression

$$\beta'\gamma' - \alpha^2 + \gamma''\alpha - \beta'^2 + \alpha\beta' - \gamma''^2 - \lambda\mu - \lambda'\mu' - \lambda''\mu''$$

est aussi un invariant.

11. *Les fonctions intermédiaires singulières.* — Il existe un autre moyen de parvenir aux relations singulières.

On appelle *fonction intermédiaire* toute fonction entière de u, v, w qui se reproduit, multipliée par une exponentielle de la forme $ce^{lu+mv+nw}$, quand u, v, w augmentent d'une période. En désignant par $f(u, v, w)$ une telle fonction, on a ainsi

$$f(u+q_i, v+q'_i, w+q''_i) = c_i e^{l_i u+m_i v+n_i w} f(u, v, w)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 6).$$

En multipliant $f(u, v, w)$ par une exponentielle à exposant du second degré en u, v, w, on peut s'arranger de manière que le produit, que nous désignerons par $\varphi(u, v, w)$, vérifie les relations

$$(23)\quad \begin{cases} \varphi(u+1, v, w) = \varphi(u, v, w)e^{\theta' w}, \\ \varphi(u, v+1, w) = \varphi(u, v, w)e^{\theta'' u}, \\ \varphi(u, v, w+1) = \varphi(u, v, w)e^{\theta v}. \end{cases}$$

Les trois autres relations s'écriront

$$(24)\quad \begin{cases} \varphi(u+g, v+h', w+h') = c\, e^{lu+mv+nw}\, \varphi(u, v, w), \\ \varphi(u+h'', v+g', w+h) = c'\, e^{l'u+m'v+n'w}\, \varphi(u, v, w), \\ \varphi(u+h', v+h, w+g'') = c''\, e^{l''u+m''v+n''w}\, \varphi(u, v, w). \end{cases}$$

Les coefficients θ, l, m, n ne peuvent d'ailleurs pas être quelconques. Il faut qu'en ajoutant successivement deux périodes, on obtienne un résultat indépendant de l'ordre des périodes.

En combinant deux à deux les équations (23), on trouve ainsi

$$\theta = 2\pi i\lambda, \qquad \theta' = 2\pi i\lambda', \qquad \theta'' = 2\pi i\lambda'',$$

λ, λ', λ'' étant des entiers positifs, nuls ou négatifs.

En combinant chacune des équations (23) avec chacune des équations (24), il vient

$$\begin{aligned} l &= 2\pi i(\alpha + \lambda H'), & m &= 2\pi i(\beta + \lambda G), & n &= 2\pi i(\gamma + \lambda H), \\ l' &= 2\pi i(\alpha' + \lambda' H''), & m' &= 2\pi i(\beta' + \lambda' H'), & n' &= 2\pi i(\gamma' + \lambda G'), \\ l'' &= 2\pi i(\alpha'' + \lambda'' G'), & m'' &= 2\pi i(\beta'' + \lambda'' H''), & n'' &= 2\pi i(\gamma'' + \lambda H''), \end{aligned}$$

α, β, γ, α', ..., γ'' étant 9 entiers.

En combinant enfin deux à deux les équations (24), et appelant

μ, μ', μ'' de nouveaux entiers,

$$l''H' + m''G' + n''H = l'H + m'H + n'G' + 2\pi i\mu,$$
$$l'H + m'H + n'G'' = l''G + m''H + n''H + 2\pi i\mu',$$
$$l'G + m'H + n'H'' = l'H'' + m'G + n'H + 2\pi i\mu'',$$

c'est-à-dire, en tenant compte des valeurs de l, m, n, ..., n'', et appelant toujours $\mathfrak{G}$, ..., $\mathfrak{H}''$ les mineurs du déterminant des périodes

$$\lambda\mathfrak{G} + \lambda'\mathfrak{H}'' - \lambda''\mathfrak{H}' + \gamma'G' - \beta''G' + (\beta - \gamma')H + \alpha H' - \alpha H + \mu - \mu' = 0,$$
$$\lambda\mathfrak{H}'' + \lambda''\mathfrak{G} + \lambda''\mathfrak{H} - \alpha''G - \gamma G'' + (\gamma - \alpha'')H + \alpha H - \alpha H + \mu' - \mu'' = 0,$$
$$\lambda\mathfrak{H} + \lambda'\mathfrak{H} - \lambda''\mathfrak{G} + \beta G - \alpha G + (\alpha - \beta)H + \alpha H - \alpha H'' + \mu - \mu'' = 0.$$

Ce système n'est autre que notre système de relations singulières, sous la forme (14).

12. Les deux cas distingués au n° **6** sont encore à distinguer ici.

Premier cas. — Tous les coefficients des relations singulières sont nuls, de sorte que les périodes peuvent être quelconques. Posons encore

$$\alpha = \beta' = \gamma'' = k.$$

Les relations (22) et (23) deviennent

$$\varphi(U+1, V, W) = \varphi(U, V, W), \qquad \varphi(U+G, V+H'', W+H') = C e^{2\pi i k U} \varphi(U, V, W),$$
$$\varphi(U, V+1, W) = \varphi(U, V, W), \qquad \varphi(U+H'', V+G, W+H) = C e^{2\pi i k V} \varphi(U, V, W),$$
$$\varphi(U, V, W+1) = \varphi(U, V, W), \qquad \varphi(U+H', V+H, W+G) = C e^{2\pi i k W} \varphi(U, V, W).$$

La fonction φ est alors une *fonction thêta*. Ainsi, dans le cas où il n'y a pas de relations singulières entre les périodes, les seules fonctions intermédiaires sont les fonctions thêta et leurs produits par des exponentielles à exposant du second degré en U, V, W.

Deuxième cas. — Les coefficients des relations singulières ne sont pas tous nuls, de sorte que les périodes ne sont pas quelconques. On a un nouveau type de fonctions intermédiaires, qu'on appelle *fonctions intermédiaires singulières*.

L'existence d'un système de relations singulières à coefficients

entiers, vérifié par un système de périodes donné, est donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des fonctions intermédiaires, autres que les fonctions thêta, admettant ces périodes.

Il était évident *a priori* que les deux propriétés que nous avons considérées successivement, l'existence de transformations singulières et l'existence des fonctions intermédiaires singulières, sont toutes les deux invariantes lorsqu'on transforme un système de périodes par une transformation d'Hermite. Mais cette remarque ne suffisait pas pour affirmer la simultanéité de ces deux propriétés. Les deux calculs que nous avons faits sont donc bien nécessaires.

(*A suivre.*)

382

Journal de Mathématiques pures et appliquées.

irgule *ajoutez* $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right.$

ERRATUM.

eu de nous sa rons.

Page 216, lignes 7, 11, 13, 27, *au lieu de* « ensemble zéro », *lire* « ensemble o », cette abréviation ayant, selon l'habitude, le sens de l'expression anglaise : « ordinary outer limiting set », ainsi qu'il résulte évidemment de tout le contexte.

entiers, vérifié par un système de périodes donné, est donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des fonctions intermédiaires, autres que les fonctions thêta, admettant ces périodes.

Il était évident *a priori* que les deux propriétés que nous avons considérées successivement, l'existence de transformations singulières et l'existence des fonctions intermédiaires singulières, sont toutes les deux invariant
transformation
affirmer la sim
nous avons fait

ERRATA.

(8e série, tome II, 1919.)

Page 203, ligne 18, *au lieu de* $d\mathrm{H}$, *lire* $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \vartheta}$; avant la virgule *ajoutez* ($\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ étant symbole de dérivation explicite).

Page 209, ligne 16, *au lieu de* 78, *lire* 98; ligne 25, *au lieu de* nous saurons, *lire* nous aurons.

TABLE DES MATIÈRES.

HUITIÈME SÉRIE. — TOME IV.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

		Pages.
[V9. 10]	Funérailles de M. Georges Humbert. Discours de M. *Jordan*.	1
[I]	Sur les formes d'Hermite ternaires dans un corps quadratique imaginaire (champs $\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-2}$); par M. *Georges Humbert*	3
[O6k]	Transformations of surfaces applicables to a quadric; by *Luther Pfahler Einschart* (Princeton)	37
[J3]	Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes et sur leurs rapports avec le calcul des variations; par M. *Henri Lebesgue*	67
[D2]	Sur la recherche des points irréguliers de certaines fonctions définies par leur développement de Taylor; par M. *J. Soula*.	97
[R5a]	The uniaxial potential function (fonction de potentiel) and its orthogonal force function (fonction de force) contrasted; par M. *G. Greenhill*	155
[H11]	Lignes de discontinuité des solutions de certaines équations de Fredholm; par M. *Gaston Julia*	195
[C2h]	L'intégration double par rapport à une courbe; par M. *H. Young*	207

Pages.

[Q3] Sur l'homéomorphe de deux figures et de leurs voisinages; par M. *Louis Antoine* 221

[I19a] Integral solutions of the équation $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ in the quadratic realm of rationality; par M. *Harris Hancock* 327

[I9c] Généralisation d'un théorème de Tchebycheff; par M. *Trygve Nagel* 343

[G4b] Sur les systèmes de relations singulières entre les périodes de fonctions abéliennes à trois variables (*à suivre*); par M. *Paul Lévy* 357

Errata, 8e série, tome II, 1919 383

FIN DU TOME IV DE LA HUITIÈME SÉRIE.

65127 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

QA
1
J684
sér.8
t.4
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY